Приложение А
Формула крюков

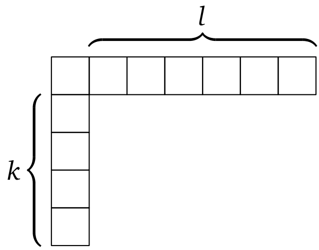
(В. А. Клепцын, Г. А. Мерзон)

Напомним, что *размерностью* диаграммы Юнга λ называется количество стандартных таблиц формы λ или, что то же самое, количество путей в вершину λ в графе Юнга. В данном разделе будет объяснено, как при помощи метода отражений получить некоторую мультипликативную формулу для размерности произвольной диаграммы.

Впервые метод отражений для решения этой задачи был применен Д. Зильбергером в заметке [18], сам метод отражений восходит к статье Д. Андрэ [9]. Существует и множество других доказательств формулы крюков. Доступное изложение на русском языке одного из них можно найти в статье [6].

Второй автор благодарен М. А. Берштейну за полезные обсуждения.

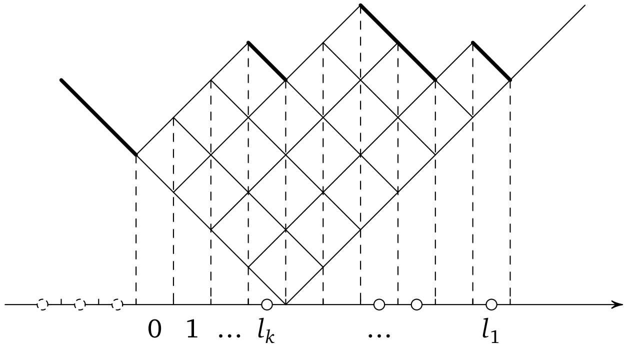
А.1. У этой задачи есть как минимум один хорошо известный частный случай. А именно, посмотрим на диаграмму Юнга в виде уголка с «плечами» k и l.



Нетрудно понять, что размерность такой диаграммы есть число путей из точки $(0, 0)$ в точку (k, l), в которых каждый шаг является сдвигом на 1 по одной из координат. С другой стороны, количество таких путей дается биномиальным коэффициентом $\binom{k+l}{k}$, для которого есть явная формула: $\binom{k+l}{k} = \frac{(k+l)!}{k!\,l!}$.

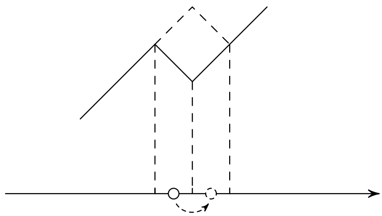
Формулу для размерности произвольной диаграммы, которую мы получим, можно рассматривать как некое обобщение приведенного выше утверждения о биномиальных коэффициентах.

А.2. Диаграмма Юнга задается формой своей границы, т. е. последовательностью вертикальных и горизонтальных отрезков. Вместо последовательности отрезков рассмотрим последовательность пронумерованных ячеек: в ячейки, соответствующие вертикальным отрезкам, поместим по шарику, остальные ячейки оставим пустыми.



Другими словами, каждой строке диаграммы поставим в соответствие по шарику, находящемуся в ячейке с номером $l_i := \lambda_i + k - i$.

Добавлению к диаграмме клетки соответствует перемещение одного из шариков на одну ячейку вправо (и эта ячейка должна быть свободна).



Поэтому задачу нахождения размерности диаграммы λ можно переформулировать следующим образом.

В клетках с номерами $0, 1, \ldots, k-1$ *находится по шарику. За ход разрешается сдвинуть один из шариков на клетку вперед, если эта клетка свободна. Сколькими способами можно перевести шарики в клетки* $l_k, l_{k-1}, \ldots, l_1$*?*

Это уже довольно близко к задаче, которую мы можем решить. А именно, если бы разрешалось сдвигать шарики в уже занятые клетки, то ответ давался бы мультиномиальным коэффициентом

$$\binom{N}{l_1-(k-1),\, l_2-(k-2)\ldots,\, l_k} = \frac{N!}{(l_1-k+1)!(l_2-k+2)!\ldots l_k!}$$

(считаем, что шарики пронумерованы и каждый шарик в конце должен оказаться на своем месте; N — общее количество клеток диаграммы). Остается учесть то, что шарикам запрещено занимать одну клетку. Сделать это можно при помощи *метода отражений*.

А.3. Проще всего разобраться в том, как работает метод отражений, на примере двух шариков (т. е. диаграмм из двух строк).

Пусть при движении два шарика в какой-то момент оказались в одной клетке. Поменяем *в первый такой момент* местами их номера. Тогда в конце пути шарики все равно окажутся в клетках l_1 и l_2, но каждый попадет в «чужую» клетку. И наоборот, если в конце пути шарики оказались в нужных клетках но в неправильном порядке, то в какой-то момент их пути обязательно пересеклись.

Значит, среди $\binom{N}{l_1-1,\,l_2}$ путей есть ровно $\binom{N}{l_1,\,l_2-1}$ «незаконных», а искомая размерность есть

$$\binom{N}{l_1-1,\,l_2}-\binom{N}{l_1,\,l_2-1}.$$

Можно заметить, кстати, что размерность диаграммы Юнга, представляющей собой прямоугольник $2\times n$, есть n-е число Каталана c_n. А мы, таким образом, только что доказали известную формулу для чисел Каталана[1]

$$c_n=\binom{2n}{n}-\binom{2n}{n-1}=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

А.4. Оказывается, подобная формула есть для любого количества шариков. А именно, нужно взять всевозможные перестановки конечных положений шариков и просуммировать соответствующие количества путей, беря каждое слагаемое со знаком соответствующей перестановки. (Доказательство этого утверждения оставляется читателям в качестве упражнения.)

Предложение. *Для произвольной диаграммы Юнга* $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$

$$\dim\lambda=\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\binom{N}{l_1-(\sigma(k)-1),\,\dots,\,l_k-(\sigma(1)-1)},$$

где $l_i=\lambda_i+k-i-1$.

(Указание: чтобы доказать, что все «незаконные» пути в правой части сокращаются, рассмотрите первый момент, в который два шарика оказались в одной ячейке.)

А.5. Последняя формула наводит на мысли об определителе. И действительно, нетрудно понять, что

$$\sum_{\sigma\in S_k}\operatorname{sgn}(\sigma)\binom{N}{l_1-\sigma(k)+1,\,\dots,\,l_k-\sigma(1)+1}=N!\,\det\left(\frac{1}{(l_{k-j+1}+1-i)!}\right).$$

[1]Существует много способов определить числа Каталана. Например, как число способов разбить выпуклый $(n+2)$-угольник на треугольники непересекающимися диагоналями или как число путей на квадратной решетке из точки $(0,0)$ в точку (n,n), не опускающихся ниже диагонали $y=x$.

Чтобы сделать элементы матрицы целочисленными, вынесем общий знаменатель $l_i!$ каждого из столбцов за скобки. Получим, что

$$\dim\lambda = \frac{N!}{l_1!\, l_2! \ldots l_k!} \cdot \det V_l',$$

где

$$V_l' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \frac{l_k!}{(l_k-1)!} & \frac{l_{k-1}!}{(l_{k-1}-1)!} & \ldots & \frac{l_1!}{(l_1-1)!} \\ \frac{l_k!}{(l_k-2)!} & \frac{l_{k-1}!}{(l_{k-1}-2)!} & \ldots & \frac{l_1!}{(l_1-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{l_k!}{(l_k-k+1)!} & \frac{l_{k-1}!}{(l_{k-1}-k+1)!} & \ldots & \frac{l_1!}{(l_1-k+1)!} \end{pmatrix},$$

или, что то же самое,

$$V_l' = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ l_k & \ldots & l_1 \\ l_k(l_k-1) & \ldots & l_1(l_1-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ l_k(l_k-1)\ldots(l_k-k+2) & \ldots & l_1(l_1-1)\ldots(l_1-k+2) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно заметить, что преобразованиями строк, которые не меняют определителя, можно превратить эту матрицу в *матрицу Вандермонда*

$$V_l = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ l_k & l_{k-1} & \ldots & l_1 \\ l_k^2 & l_{k-1}^2 & \ldots & l_1^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_k^{k-1} & l_{k-1}^{k-1} & \ldots & l_1^{k-1} \end{pmatrix},$$

определитель которой хорошо известен[1]: $\det V_l = \prod\limits_{i<j}(l_i - l_j)$.

[1]Впрочем, можно и не делать никаких преобразований строк, а просто заметить, что вычисление определителя матрицы Вандермонда без изменений проходит и для матрицы V_l'. Действительно, $\det V_l'$ обращается в ноль при $l_i = l_j$, а потому многочлен $\det V_l'$ делится на многочлен $\prod\limits_{i<j}(l_i - l_j)$; но так как степени этих многочленов равны, они отличаются только умножением на константу. А чтобы убедиться, что эта константа равна единице, можно сравнить коэффициент при каком-то одном мономе (например, при $l_1^{k-1} l_2^{k-2} \ldots l_{k-1}$).

А.6. Таким образом, мы получили следующую формулу.

Теорема (формула Фробениуса—Юнга). *Размерность произвольной диаграммы Юнга с длинами строк $\lambda_1 > \ldots > \lambda_k$ может быть найдена по формуле*

$$\dim\lambda = N!\cdot\frac{\prod\limits_{i<j}(l_i - l_j)}{l_1!\ldots l_k!},$$

где N — количество клеток диаграммы, а $l_i = \lambda_i + k - i$.

Это уже фактически и есть нужная нам формула, но обычно ее записывают несколько в другом виде.

Теорема (формула крюков). *Размерность диаграммы Юнга λ может быть найдена по формуле*

$$\dim\lambda = \frac{N!}{\prod\limits_{\square\in\lambda} h(\square)},$$

где N — количество клеток диаграммы, а $h(\square)$ — длина крюка данной клетки.

Доказательство. Посмотрим на произведение длин крюков клеток i-й строки. В этом произведении самый большой из сомножителей равен в точности числу l_i, а соседние сомножители обычно отличаются на 1 — но в тех местах, где кончается одна из строк ниже, возникают «дырки». Отсюда видно (проверьте!), что произведение длин крюков i-й строки есть

$$\frac{l_i!}{\prod\limits_{j:i<j}(l_i - l_j)},$$

и формула превращается в доказанную в предыдущей теореме. $\square$