Целые точки в многоугольниках и многогранниках

Г. Мерзон[*]

лето 2017

Как найти площадь многоугольника на клетчатой бумаге? Если достаточно приблизительного ответа, то можно просто посчитать количество клеток, которые он занимает.

Чудесным образом эта нехитрая идея приводит и к *точным* формулам для площадей многоугольников и объемов многогранников, вершины которых имеют целочисленные координаты. А возникающая *теория Эрхарта* оказывается применима в разных задачах алгебры и комбинаторики, в которых никаких геометрических фигур, на первый взгляд, не видно.

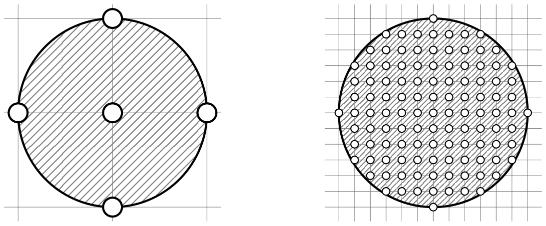
1. Площадь и число целых точек. Пусть P — фигура на клетчатой бумаге. Грубую оценку для ее площади дает количество занимаемых ей клеток — или, что примерно то же самое, число N_P узлов сетки, накрываемых P,

$$S_P \approx N_P.$$

Чтобы повысить точность этой оценки, можно посмотреть на сетку с более мелкими клетками. Пусть линии новой сетки идут на расстоянии $1/n$ друг

[*]merzon@mccme.ru

от друга. Тогда площадь новой клетки равна $\frac{1}{n^2}$, и если P накрывает $N_P(n)$ узлов новой сетки, то $S_p \approx N_P(n)/n^2$. С ростом n мы получаем сколь угодно точное приближение к площади.



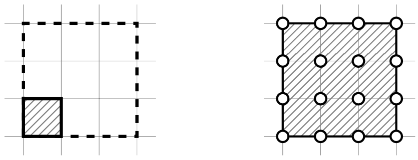
$n = 1$, $S \approx 5$ $\qquad$ $n = 6$, $S \approx 3{,}139$

Предложение 1. $\dfrac{N_P(n)}{n^2} \longrightarrow S_p \quad (n \to \infty)$.

Вместо того, чтобы измельчать сетку, можно увеличивать фигуру P: $N_P(n)$ есть количество узлов сетки, накрываемых фигурой nP, получающейся из P гомотетией с коэффициентом n (и центром в одном из узлов сетки).

2. Многочлен Эрхарта многоугольника. Далее P будет *многоугольником с вершинами в узлах сетки.* Чтобы превратить предложение 1 в формулу для площади, надо изучить, как $N_P(n)$ зависит от n. Начнем с примеров.

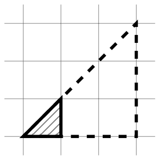
Пример 1. Пусть P — единичный квадрат. Тогда nP — квадрат со стороной n, и $N_P(n) = (n+1)^2$. Видно, что выражение $N_P(n)/n^2 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$ действительно стремится к 1, площади квадрата.



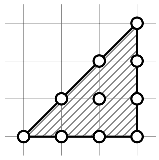
$P \mapsto 3P$ $\qquad$ $N_P(3) = (3+1)^2$

Вообще для прямоугольника $a \times b$ $N_P(n) = (an+1)(bn+1) = (ab)n^2 + (a+b)n + 1$ и видно, что $N_P(n)/n^2$ стремится к ab.

Пример 2. Пусть P — равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом 1. Треугольник nP накрывает $1+2+\ldots+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=$ $=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$ узел сетки и $\frac{N_P(n)}{n^2}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\to\frac{1}{2}=S_P$.

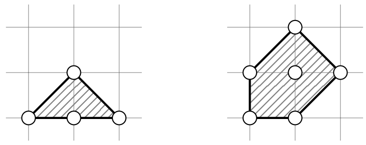


$P\mapsto 3P$



$N_P(3)=1+2+3+4$

Упражнение 1. Найдите функции N_P для треугольника и пятиугольника на рис. ниже.



На основании этих примеров можно предположить, что верно следующее утверждение.

Теорема 1. Пусть P — многоугольник с вершинами в узлах сетки. Для целого положительного n определим $N_P(n)$ как число узлов сетки, которое накрывает многоугольник nP. Тогда

1) N_P — многочлен степени 2 с рациональными коэффициентами (“*многочлен Эрхарта* многоугольника P”);

2) старший коэффициент многочлена N_P равен площади многоугольника;

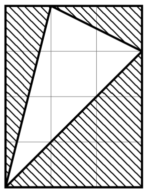
3) свободный член многочлена N_P равен 1.

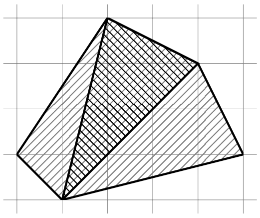
Подчеркнем, что основная часть теоремы — это утверждение о полиномиальности функции N_P: в силу предложения 1 отсюда сразу следует и то, что это многочлен именно 2 степени, и то, что его старший коэффициент равен площади.

Нетрудно из этой теоремы получить и явную формулу для площади: это один из двух неизвестных нам коэффициентов многочлена 2 степени, так что его можно выразить через значения этого многочлена в каких-нибудь двух точках. Например, следующим образом.

Предложение 2. Если P — многоугольник с вершинами в узлах сетки, то $S_P=\frac{1}{2}(N_P(2)-2N_P(1)+1)$.

Из этой формулы видно, в частности, что *площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки всегда является целой или полуцелой*, что априори не очевидно даже для треугольников: представьте себе вычисление этой площади по формуле Герона...





Обычный способ доказать полуцелочисленность площади — заметить, что любой треугольник можно получить, отрезая от прямоугольника прямоугольные треугольники (для которых утверждение очевидно), а любой многоугольник можно разрезать на треугольники.

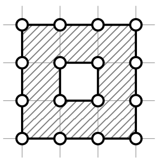
Такой план работает и для доказательства формулы для площади из предложения 2 (подробнее об этом можно прочитать в статье [1]), и для доказательства самой теоремы.

Упражнение 2. Докажите, что для (незамкнутой) ломаной $N_P(n)$ — многочлен степени 1 со свободным членом 1.

Упражнение 3. Докажите теорему 1 а) для прямоугольников со сторонами по линиям сетки; б) для прямоугольных треугольников с катетами по линиям сетки; в) для произвольных треугольников; г) для произвольных многоугольников.

Отметим здесь одну тонкость: для доказательства того, что свободный член многочлена Эрхарта равен 1, существенно, что P — это настоящий многоугольник. В более общем случае (если разрешены “многоугольники с дырками” и т. п.) свободный член равен *эйлеровой характеристике* фигуры P.

Упражнение 4. Найдите многочлен Эрхарта для “рамки” ниже.



Верен и естественный аналог теоремы 1 для многогранников с вершинами в "целых" (имеющих целочисленные координаты) точках: количество $N_P(n)$ целых точек внутри многогранника nP зависит от n как многочлен степени 3, старший коэффициент которого равен объему многогранника P.

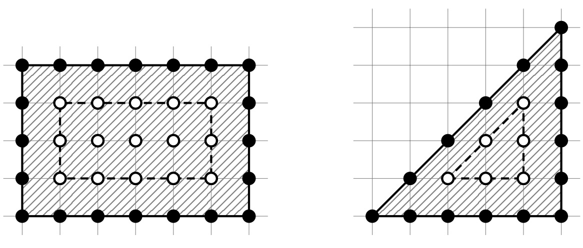
Но вот план доказательства из упражнения 3 в этом случае совершенно не работает. Дело тут в том, что на плоскости любые две фигуры одной площади *равносоставлены* (одну можно разрезать на части и сложить из них другую), но в пространстве это уже совершенно не так: как доказал в начале 20-го века М. Ден, почти никакая треугольная пирамида не равносоставлена с параллелепипедом[1]. Поэтому на плоскости утверждение теоремы по сути достаточно проверить для единичного квадрата, но в пространстве это уже совершенно не так.

В разделе 4 мы обсудим другое доказательство теоремы 1, которое без труда переносится и на многогранники.

3. Взаимность и формула Пика. Число $N_P(n)$ было определено только для целых положительных n. Но коль скоро оно зависит от n как многочлен, в этот многочлен можно формально подставлять и отрицательные n. Попробуем понять, какой смысл имеют получающиеся в результате этой странной процедуры числа.

Начнем снова с примеров. Для прямоугольника $a \times b$ имеем $N_P(n) = (an+1)(bn+1)$, а значит, $N_P(-n) = (-an+1)(-bn+1) = (an-1)(bn-1)$. Т. е. мы снова получили количество точек в прямоугольнике, но немного меньшем (каждую сторону нужно уменьшить на 2).

Для равнобедренного прямоугольного треугольника $N_\triangle(n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$, $N_\triangle(-n) = \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ — тоже число точек в треугольнике, но чуть меньшем.



$N_P(2)$ и $N_P(-2)$ $\qquad$ $N_\triangle(5)$ и $N_\triangle(-5)$

[1]Про это можно прочитать в статье [2].

Теорема 2. Если P — многоугольник с вершинами в узлах сетки, то значение $N_P(-n)$ многочлена Эрхарта в целой отрицательной точке равно количеству целых точек *строго внутри* многоугольника nP.

Вместе с теоремой 1 эта *теорема взаимности* составляет двумерный случай *теоремы Эрхарта–Макдональда.* Про доказательство мы поговорим в следующем разделе.

Если $N_P(n) = Sn^2 + \frac{b}{2}n + 1$, то $N_P(-n) = Sn^2 - \frac{b}{2}n + 1$. Эти два числа отличаются на bn. То есть на границе многоугольника nP лежит bn узлов сетки. Другими словами, *коэффициент при n в многочлене Эрхарта — это половина количества узлов сетки на границе многоугольника P.* Теперь легко выразить площадь многоугольника S через количество узлов строго внутри него $N(-1)$ и на его границе b.

Предложение 3 (формула Пика[2])**.** Если P — многоугольник с вершинами в узлах сетки, то

$$S_P = i_P + \frac{b_P}{2} - 1,$$

где i_P — число узлов сетки внутри многоугольника, b_P — число узлов сетки на его границе.

Можно сказать, что если наша прошлая формула для площади выражала ее через $N_P(0)$, $N_P(1)$, $N_P(2)$, то эта формула — выражает площадь через $N_P(0)$ и $N_P(\pm 1)$:

$$S_P = \frac{N_P(1) + N_P(-1)}{2} - N_P(0).$$

Теперь понятно, что не стоит ожидать существования полного аналога формулы Пика для многогранников: если бы объем можно было выразить через количество целых точек внутри многогранника и на его границе, это значило бы, что мы можем найти старший член кубического многочлена N_P — т. е. один из *четырех* его коэффициентов — по значениям этого многочлена всего в *трех* точках (± 1 и 0).

[2]У формулы Пика есть множество разных доказательств. Мое любимое доказательство — с тающим льдом ([3]) — можно прочитать в статье [7].

Упражнение 5. Рассмотрим *тетраэдр Рива* — треугольную пирамиду, основание которой — половина единичного квадрата, а вершина находится над четвертой вершиной квадрата на высоте h (т. е. вешины имеют координаты $(1,1,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ и $(0,0,h)$).

а) Убедитесь, что эта пирамида не содержит никаких целых точек, кроме своих вершин, но при изменении h ее объем меняется.

б) Найдите многочлен Эрхарта такой пирамиды.

Последнее упражнение показывает, что даже если знать, сколько из точек на границе лежат внутри граней, а сколько на ребрах и т. д., этого не достаточно для нахождения объема. Зато можно выразить объем через значения многочлена Эрхарта в четырех точках.

Упражнение 6. Выведите из теоремы Эрхарта, что если P — многогранник с целыми вершинами, то его объем равен

$$\frac{N_P(3) - 3N_P(2) + 3N_P(1) - 1}{6}.$$

Можно найти и формулу для объема, больше похожую на классическую формулу Пика.

Упражнение 7. Выразите объем многогранника P с целыми вершинами через b_P, i_P и количество узлов *вдвое меньшей решетки* внутри многогранника, i_{2P}.

4. Доказательство теоремы Эрхарта–Макдональда. Как доказать, что последовательность чисел представляет собой последовательность значений многочлена степени k? Если $k = 0$, то условие состоит в том, что последовательность постоянна, т. е. в том, что соседние члены равны. Если $k = 1$, то в том, что это арифметическая прогрессия, т. е. в том, что разность между соседними членами постоянна. Можно продолжать в том же духе и дальше.

Лемма 3. N — многочлен степени k тогда и только тогда, когда его *разностная производная* ΔN — многочлен степени $k-1$, где $\Delta N(n) = N(n+1) - N(n)$.

Доказательство. В одну сторону утверждение доказать легко: $\Delta n^k = (n+1)^k - n^k$ — многочлен степени $k-1$ (это видно из бинома Ньютона, или просто из формулы для $a^k - b^k$); а раз каждый из мономов переходит в многочлен на единицу меньшей степени, то (т. к. $\Delta(F+G) = \Delta F + \Delta G$) и степень любого многочлена уменьшается на 1.

Утверждение в другую сторону нам сейчас нужно только для $k = 2$, а это совсем просто:

$$N(n) = N(n-1) + \Delta N(n-1) = \ldots = \\ = N(0) + \Delta N(0) + \Delta N(1) + \ldots + \Delta N(n-1),$$

то есть $N(n)$ — это сумма арифметической прогрессии ΔN плюс константа $N(0)$, а значит, $N(n)$ действительно является многочленом степени 2.

Доказательство общего случая — это непосредственно связано с суммами $1^k + 2^k + \ldots + n^k$ — можно найти, например, в разделе 1 заметки [6]. (Или докажите его самостоятельно; указание: для многочлена P степени $k-1$ запишите условие $\Delta N = P$ как систему уравнений на коэффициенты многочлена n и убедитесь, что она всегда имеет решение.) $\square$

Избавляясь от рекурсии, можно переформулировать этот критерий полиномиальности следующим образом.

Предложение 4. N — многочлен степени k тогда и только тогда, когда после $(k+1)$-кратного применения разностной производной он обращается в ноль, $\Delta^{k+1}N = 0$.

Это утверждение, кстати, делает понятнее и формулу для площади из предложения 2: если нас интересует старший коэффициент многочлена степени 2, то с точностью до множителя правильный ответ дает выражение $\Delta^2 N(0)$ (все мономы меньшей степени при применения Δ^2 сокращаются), а $\Delta^2 N(0) = N(2) - 2N(1) + N(0)$.

Аналогичным образом формула из упражнения 6 связана с обращением в ноль выражения $\Delta^3 N$ для многочленов степени 2.

Теперь мы готовы доказать теорему Эрхарта–Макдональда для многоугольников. Конкретно нам осталось доказать следующее утверждение (включающее в себя и полиномиальность функции N_P, и утверждение о значении этого многочлена в нуле, и “взаимность” для значений в отрицательных точках).

Теорема 4. Пусть P — многоугольник с вершинами в узлах сетки. Тогда функция, определенная в целых точках как

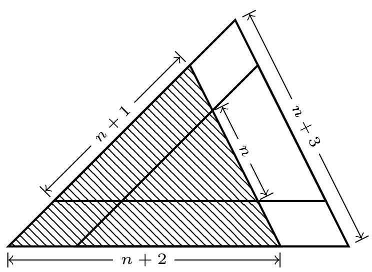
$$N_P(n) = \begin{cases} \text{число целых точек, накрываемых фигурой } nP, & n > 0; \\ 1, & n = 0; \\ \text{число целых точек строго внутри фигуры } (-n)P, & n < 0 \end{cases}$$

является многочленом степени 2.

Напомним, что nP — это результат гомотетии фигуры P с коэффициентом n. Подчеркнем, что функция $N_P(n)$ определяется только для целых n.

Доказательство (набросок). Для числа целых точек имеет место *аддитивность*: если фигура P покрыта фигурами P_1 и P_2, пересекающимися по фигуре X, то $N_P = N_{P_1} + N_{P_2} - N_X$. Так как любой многоугольник можно разрезать на треугольники, а про многочлены Эрхарта отрезков (и вообще ломаных — см. упражнение 2) мы все знаем, по существу достаточно доказать утверждение теоремы в случае, когда P — треугольник с вершинами в узлах сетки.

В этом случае равенство $\Delta^3 N_P = 0$ имеет замечательное комбинаторно-геометрическое доказательство[3].



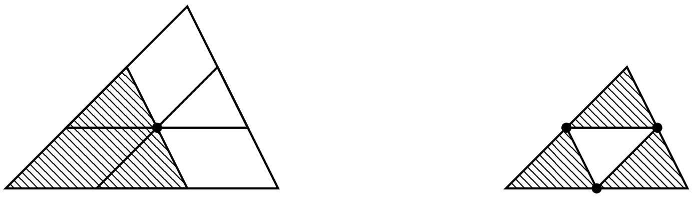
На рисунке треугольник $(n+3)P$ покрыт тремя треугольниками $(n+2)P$ (один такой треугольник заштрихован). Поэтому для подсчета узлов сетки, покрываемых большим треугольником, можно применить формулу включений-исключений:

$$N_P(n+3) = 3N_P(n+2) - 3N_P(n+1) + N_P(n).$$

[3]Такое доказательство теоремы Эрхарта–Макдональда придумал Стивен Сэм — см. статью [5].

Это и есть равенство $\Delta^3 N(n) = 0$ для целых положительных n.

Если на той же картинке посчитать только узлы строго внутри треугольников, получится доказательство того же равенства для случая $n+3<0$. Остается разобрать случаи, когда одно из чисел n, $n+1$, $n+2$, $n+3$ обращается в ноль. Ограничимся соответствующими двумя картинками.



$N(3) = 3N(2) - 3N(1) + 1$ $\qquad$ $N(2) = 3N(1) - 3 + N(-1)$ $\qquad\square$

Хотя доказательство опиралось на картинки с треугольниками, ничего специфически-двумерного в нем нет.

Упражнение 8. Пусть P — тетраэдр, вершины которого имеют целые координаты. а) Докажите, что $\Delta^4 N_P(n) = 0$ для целых нетрицательных n. б) Как определить функцию N_P в целых отрицательных точках, чтобы равенство $\Delta^4 N_P(n) = 0$ выполнялось для всех целых n?

Как и в плоском случае, отсюда следует, что для тетраэдра функция N_P является многочленом (теперь уже степени 3), а в силу аддитивности то же верно и для произвольного многогранника с целыми вершинами.

5. Целые точки в многомерных многогранниках.

Теорема 4 и ее доказательство переносятся без существенных изменений на многогранники с вершинами в целых точках *в пространстве любой размерности.*

Теорема 5. Пусть P — многогранник в $\mathbb{R}^k$ с целыми (имеющими целые координаты) вершинами. Для целого положительного n определим $N_P(n)$ как число целых точек, содержащихся в многогогранникe nP. Тогда

1) N_P — многочлен степени k с рациональными коэффициентами (*многочлен Эрхарта*);

2) старший коэффициент этого многочлена равен объему многогранника;

3) свободный член многочлена Эрхарта равен 1;

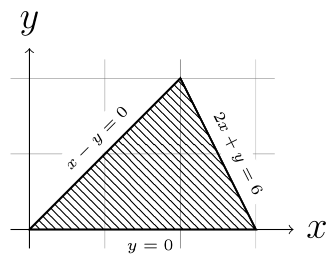
раз N_P — многочлен, в него можно формально подставлять и отрицательные числа:

4) $N_P(-n) = (-1)^k I_P(n)$, где $I_P(n)$ — количество целых точек строго внутри многогранника nP (*взаимность Эрхарта–Макдональда*).

Эта теорема была открыта математиком-любителем Е. Эрхартом в начале 1960-х годов, но утверждение 4) он доказал лишь частично; завершил доказательство взаимности И. Макдональд уже в начале 1970-х годов.

Не очень понятно, вероятно, как себе представлять геометрические объекты в многомерном пространстве — но не составляет большого труда дать их аналитические (координатные) определения.

Напомним, что точка k-мерного пространства $\mathbb{R}^k$ — это просто упорядоченный набор $(x_1, \ldots, x_k)$ из k вещественных чисел; мы называем точку *целой*, если все ее координаты целые. *Выпуклые многогранники* (а про невыпуклые многогранники мы говорить не будем) задаются системами *линейных неравенств*, т. е. неравенств вида $a_1x_1 + \ldots + a_kx_k \leqslant c$. Переход к многограннику nP соответствует домножению правой части каждого из неравенств на n.



$$\longleftrightarrow \quad \begin{cases} -y \leqslant 0; \\ -x + y \leqslant 0; \\ 2x + y \leqslant 6. \end{cases}$$

Если в данной точке какое-то из неравенств обратилось в равенство, то говорят, что эта точка лежит на *грани* нашего многогранника (а если в данной точке выполняются все строгие неравенства — что она лежит строго *внутри* многогранника).

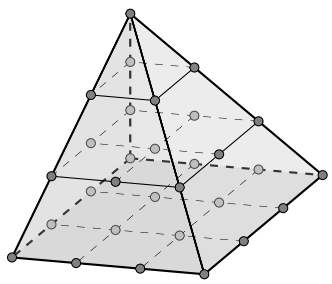
Пример 3. Единичный квадрат можно задать неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Единичный куб — неравенствами $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$. Естественно определить *k-мерный куб* как многогранник в $\mathbb{R}^k$, заданный системой неравенств $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, k)$.

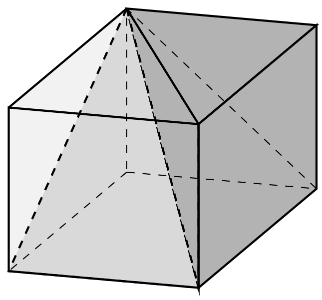
После растяжения в n раз получаются неравенства $0 \leqslant x_i \leqslant n$. Поэтому каждая из координат может принимать $n + 1$ целое значение и $N_P(n) = (n+1)^k = n^k + \ldots + 1$.

В частности, старший коэффициент этого многочлена равен 1, что соответствует тому, что единичный куб имеет единичный объем.

После такой разминки перейдем к более содержательным примерам — двум разным многомерным аналогам равнобедренного прямоугольного треугольника $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$.

Пример 4. Пусть P — это пирамида, основание которой единичный квадрат, а высота попадает в одну из вершин этого квадрата и имеет длину 1. Тогда пирамида nP содержит $1^2 + 2^2 + \ldots + (n+1)^2$ целых точек.





Т. е. $N_P(n) = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{13}{6}n + 1$. То, что старший коэффициент (т. е. объем пирамиды) равен $1/3$, отлично согласуется с тем, что из трех таких пирамид можно сложить куб.

Алгебраически такую пирамиду можно задать неравенствами $0 \leqslant x, y \leqslant \leqslant z \leqslant 1$. Хорошо видно, что сечение плоскостью $z = c$ — это действительно квадрат $c \times c$. А разбиение куба на три такие пирамиды — это его разбиение на части, где максимальной координатой является x, y или z.

Аналогичным образом можно рассмотреть в пространстве размерности $k+1$ пирамиду P, задаваемую неравенствами $0 \leqslant x_i \leqslant x_0 \leqslant 1$ $(i = 1, \ldots, k)$. Единичный куб разбивается на $k + 1$ такую пирамиду (соответствующие тому, какая из $k + 1$ координаты в данной точке куба максимальная). Сечение пирамиды nP плоскостью $x_0 = m$ представляет собой k-мерный куб $0 \leqslant x_i \leqslant m$, в котором $(m + 1)^k$ целая точка. То есть $N_P(n) = = 1^k + 2^k + \ldots + (n + 1)^k =: S_k(n + 1)$.

Значит, сумма k-х степеней последовательных чисел — многочлен степени $k + 1$ от n со старшим членом $\frac{1}{k+1}n^{k+1}$. В частности, $S_k(n) \approx \frac{1}{k+1}n^{k+1}$. А из взаимности следует, например, что $S_k(n)$ для нечетного k является многочленом от $\frac{n(n+1)}{2}$ (подробности можно найти в разделе 4 заметки [6] или попробовать восстановить самостоятельно) — это можно считать обобщением известной формулы $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

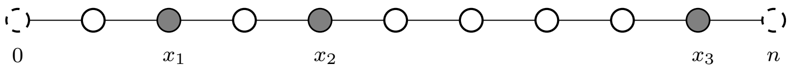
Вообще, если в первых разделах мы хотели выразить площадь многоугольника через количество целых точек, то в многомерном случае обычно, наоборот, проще вычислить объем, а более интересно количество целых точек.

С многогранниками и целыми точками в них связаны многие классические задачи перечислительной комбинаторики от нахождения числа магических квадратов до нахождения числа деревьев. Здесь приведем только самый простой пример.

Пример 5. В прошлом примере мы разбивали куб на части по тому, какая из координат максимальна. Разобьем теперь куб на более мелкие части, соответствующие тому, в каком порядке идут координаты. Т. е. многогранник P задается неравенствами $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant 1$.

Упражнение 9. Как выглядит многогранник $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$?

Куб в $\mathbb{R}^k$ разбивается на $k!$ таких многогранников (соответствующих разным перестановкам индексов), поэтому объем многогранника P равен $1/k!$. Найдем число целых точек *строго внутри* многогранника nP. Это число решений неравенств $0 < x_1 < \ldots < x_k < n$, другими словами, количество k-элементных подмножеств множества $\{1, \ldots, n-1\}$.



Т. е. $I_P(n) = \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)(n-2)\ldots(n-k)}{k!}$. Отметим, что это действительно многочлен от n степени k со старшим коэффициентом $\frac{1}{k!}$.

Подставим в этот многочлен формально $-n$:

$$I_P(-n) = \frac{(-n-1)(-n-2)\ldots(-n-k)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k}{k}.$$

С другой стороны, взаимность сообщает нам комбинаторный смысл получившегося выражения: поскольку $(-1)^k I_P(-n) = N_P(n)$, мы получили, что $\binom{n+k}{k}$ — это число решений неравенств $0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant n$, т. е. число способов выбрать k *возможно повторяющихся* элементов из $(n+1)$-элементного множества. Получилось нетривиальное комбинаторное утверждение, $\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \binom{n+k-1}{k}$.

Подобным образом можно доказывать и более сложные комбинаторные теоремы взаимности — например, для хроматических многочленов графов.

О множестве других сюжетов, связанных с целыми точками в многогранниках, можно прочитать в книге [4].

* * *

Я благодарен Гаянэ Паниной и Феде Петрову за высказанные замечания.

Список литературы

[1] *Кушниренко А. Г.* Целые точки в многоугольниках и многогранниках // Квант, 1977, №4.
`http://kvant.mccme.ru/1977/04/celye_tochki_v_mnogougolnikah.htm`

[2] *Фукс Д. Б.* Можно ли из тетраэдра сделать куб? // Квант, 1990, №11.
`http://kvant.mccme.ru/1990/11/mozhno_li_iz_tetraedra_sdelat.htm`

[3] *Blatter C.* Another Proof of Pick's Area Theorem. // Math. Magazine, 1997, 70.

[4] *Beck M., Robins S.* Computing the Continuous Discretely: Integer-point Enumeration in Polyhedra. Springer, New York, 2007.

[5] *Sam S.* A bijective proof for a theorem of Ehrhart // Amer. Math. Monthly 116 (2009), № 8, 66–701; arXiv:0801.4432.

[6] *Мерзон Г. А.* Алгебра, геометрия и анализ сумм степеней последовательных чисел // Матем. просв., сер. 3, вып. 21 (2017), 104–118.

[7] *Мерзон Г. А.* Формула Пика и тающий лед // Квант, 2018, №9.