Определители и пути

▷ Пусть Γ — ориентированный граф без ориентированных циклов, $(s_1, \ldots, s_n)$ и $(t_1, \ldots, t_n)$ — наборы его вершин. Будем рассматривать наборы путей P, приводящие из вершин $s.$ в вершины $t.$. Каждый такой набор осуществляет некоторую перестановку индексов σ_P. *Матрицей путей* ориентированного графа будем называть матрицу, в клетке (i, j) которой стоит число (ориентировнных) путей из вершины i в вершину j.

Задача 1. Количество наборов путей P из $s.$ в $t.$, посчитанных со знаками $\operatorname{sign} \sigma_P$, равно соответствующему минору матрицы путей графа.

Задача 2. Количество *непересекающихся* наборов путей P из $s.$ в $t.$, посчитанных со знаками, равно соответствующему минору матрицы путей графа для а) $n = 2$; б) произвольного n.

Задача 3. Количество непересекающихся путей на квадратной решетке из точек $(0, a_i)$ в точки $(b_i, -b_i)$ равно определителю матрицы с элементами $\binom{a_i}{b_j}$.

Задача 4 (формула Коши–Бине). Если A — матрица $m \times n$, B — матрица $n \times m$, то

$$\det(AB) = \sum_S \det A_S \det B_{S^T},$$

где сумма ведется по парам соответствующих миноров порядка m.

Определители и паросочетания

▷ Пусть Γ — двудольный граф с ориентированными ребрами. Его *ориентированной (двудольной) матрицей смежности* будем называть матрицу I, $I_{ij} = 1$, если из i-й черной вершины ведет ребро в j-ю белую, $I_{ij} = -1$, если ребро направлено в обратную сторону, $I_{ij} = 0$ иначе.

▷ Напомним, что *паросочетанием* в графе называется набор ребер без общих вершин; паросочетание назывется *совершенным*, если оно покрывает все вершины.

Задача 5. Пусть в двудольном графе поровну черных и белых вершин поровну, постройте биекцию между ненулевыми слагаемыми в $\det I$ и совершенными паросочетаниями в графе Γ.

▷ Знак этого слагаемого будем называть знаком совершенного паросочетания. (Заметим, что знаки паросочетаний зависят от выбора ориентаций ребер.)

Задача 6. Если двудольный граф Γ планарен, то его ребра можно ориентировать так, чтобы все паросочетания имели одинаковый знак. (И, таким образом, число совершенных паросочетаний в нем вычисляется определителем матрицы I.)

Задача 7. Пусть Γ — произвольный планарный граф с ориентированными ребрами. Тогда число совершенных паросочетаний в нем вычисляется пфаффианом его матрицы смежности.

Перечисление остовных деревьев

▷ Пусть Γ — ориентированный граф, ∂ — его *матрица смежности* (матрица отображения ребро $\mapsto$ конец – начало).

Задача 8 (матричная теорема о деревьях).

а) Пусть в графе Γ вершин на одну больше, чем ребер. Тогда максимальный минор матрицы смежности равен ± 1, когда Γ является деревом, и 0 иначе.

б) Для произвольного графа Γ главный минор *матрицы Лапласа* $\Delta = \partial\partial^*$ равен числу остовных деревьев графа.

в) На диагонали матрицы Δ стоят степени вершин, а вне диагонали — (-1) для пар вершин, соединенных ребром, и 0 для не соединенных.

Задача 9. Число деревьев с n пронумерованными вершинам есть n^{n-2}.
(Указание: примените матричную теорему к полному графу.)

▷ Будем теперь рассматривать наш граф Γ как электрическую схему. Сопротивление каждого ребра будем считать равным 1, источник питания подключим к вершинам a и b и подадим такое напряжение, чтобы ток был равен 1.

Напомним, что *законы Кирхгофа* для этой цепи имеют вид

$$\begin{cases} \quad \partial j = \delta_b - \delta_a, \\ -\partial^* \phi = j, \end{cases}$$

где j — токи через ребра, а ϕ — потенциалы вершин.

Задача 10 (теорема Кирхгофа). Ток через ребро ab равен доле остовных деревьев, содержащих это ребро.
(Указание: для решения линейной системы можно воспользоваться правилом Крамера.)

Задача 11 (сложная). Пусть $K(e, f)$ — ток через ребро f при подключении батарейки к ребру e. Попробуйте доказать, что доля остовных деревьев, содержащих данную группу ребер, равна соответствющему минору матрицы K (даже для двух ребер уже интересно).