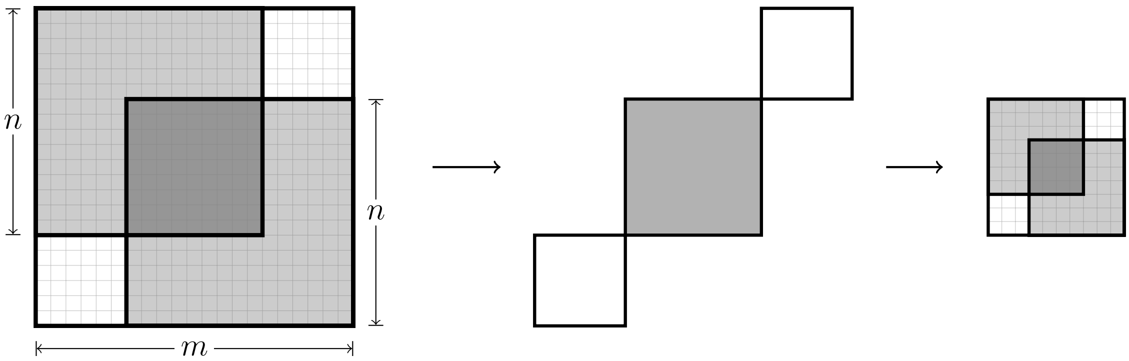
Иррациональность в картинках

▷ Число $\sqrt{2}$ *иррациональное*: не существует такой дроби m/n, равной $\sqrt{2}$, т. е. такой, что $(m/n)^2 = 2$. Как это доказать?

Предположим, что $(m/n)^2 = 2$. Это означает, что $m^2 = 2n^2$. Нарисуем на клетчатой бумаге квадрат со стороной m, площадь которого равна площади двух квадратов со строной n (см. рис.).

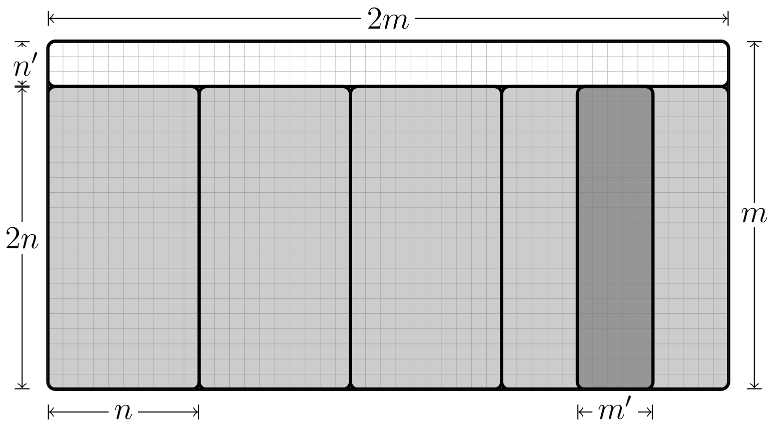


Но тогда площадь квадрата, покрытого дважды, равна сумме площадей двух квадратов, не покрытых ни разу (докажите это!).

То есть по паре чисел со свойством $m^2 = 2n^2$ мы получили два *меньших* числа m' и n' с тем же свойством. А по ним можно так же построить еще меньшие числа... Такой процесс не может продолжаться бесконечно (все наши числа целые!).

Значит, исходное предположение неверно и $\sqrt{2}$ не может быть представлено в виде дроби.

▷ Похожим способом можно доказать, что число $\sqrt{5}$ иррационально. Предположим, что $m/n = \sqrt{5}$, т. е. $m^2 = 5n^2$ для некоторых целых чисел m и n. Нарисуем на клетчатой бумаге прямоугольник $2m \times m$, а внутри него 5 прямоугольников $2n \times n$ (см. рис.).

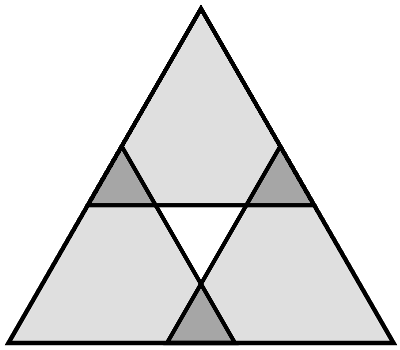


По нашему предположению общая площадь маленьких прямоугольников равна площади большого прямоугольника. Значит, как и в прошлом доказательстве, площадь, покрытая дважды, равна площади, не покрытой ни разу.

Мы получили, что $2m \times n' = 2n \times m'$, т. е. $m'/n' = m/n$ — по паре целых чисел m и n с отношением $\sqrt{5}$ мы построили пару меньших (почему, кстати?) целых чисел с тем же отношением.

Снова (как и в прошлом доказательстве) мы получаем бесконечный процесс, при котором целые числа все время уменьшаются. Это невозможно, значит, наше предположение было неверно, а $\sqrt{5}$ — число иррациональное.

▷ Темы для дальнейших размышлений:
а) докажите иррациональность $\sqrt{3}$, вдохновляясь первым рассуждением картинкой ниже;
б) обобщите второе доказательство на какие-нибудь еще корни (например, на $\sqrt{k^2+1}$);
в) попробуйте придумать еще какие-то геометрические доказательства иррациональности;
г) выразите m' и n' через m и n и переведите все рассуждения на чисто алгебраический язык; подумайте про обобщения.



▷ Такое геометрическое доказательство иррациональности $\sqrt{2}$ придумал Stanley Tennenbaum, иррациональности $\sqrt{3}$ — John H. Conway. См. также статью *А. В. Спивак.* Иррациональность корней из 2, 3, 5 и 6 // Квант, 2010, № 1.