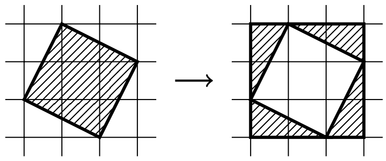
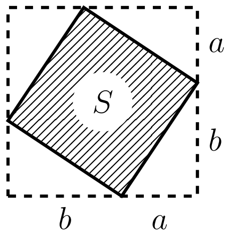
Косые квадраты и теорема Пифагора

▷ Как найти площадь «косого» квадрата на рисунке?



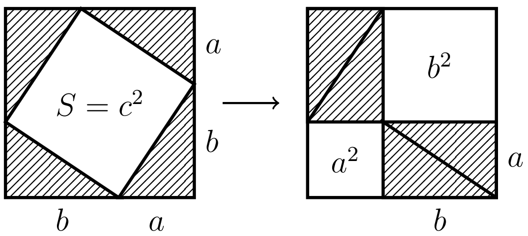
Впишем его в «коробку» (квадрат 3×3) и посмотрим, насколько площадь косого квадрата меньше площади коробки. Площадь каждого из маленьких треугольников — одна клетка (из двух таких треугольников складывается прямоугольник 1×2), а значит, искомая площадь есть $3^2 - 4 \cdot 1 = 5$.

▷ Аналогичным образом можно найти площадь любого косого квадрата:



$S = (a+b)^2 - 4 \cdot {}^{ab}\!/_2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2$. (Проверим эту формулу для нашего первого квадрата: $S = 2^2 + 1^2 = 5$ — все сходится. Отметим еще, что площадь любого косого квадрата оказывается целым числом.)

▷ Простота получившегося ответа намекает на то, что можно обойтись и без вычисления — и действительно, посмотрим на картинку ниже.

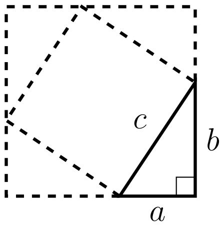


На ней видно, что наш косой квадрат занимает такую же площадь, что и квадраты со сторонами a и b вместе — а именно, весь большой квадрат (со стороной $a+b$), за исключением четырех заштрихованных треугольников (со сторонами a и b).

▷ Теперь мы видим, чему равна сторона c косого квадрата: с одной стороны, площадь этого квадрата равна c^2, а с другой стороны, как мы только что доказали, она же равна $a^2 + b^2$.

Например, сторона самого первого косого квадрата имеет длину $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

Другими словами, только что мы доказали **теорему Пифагора**: если в прямоугольном треугольнике катеты имеют длины a и b, а гипотенуза имеет длину c, то $c^2 = a^2 + b^2$.



Например, если катеты прямоугольного треугольника имеют длины 3 и 4, то его гипотенуза имеет длину 5 (действительно, $5^2 = 25 = 9 + 16 = 3^2 + 4^2$).

▷ Вопросы для дальнейших размышлений.

1) Площади всех квадратов с вершинами в узлах сетки получились целыми. А что можно сказать про площади других фигур на клетчатой бумаге? Можно ли на клетчатой бумаге нарисовать треугольник площади $4^1/_2$? $5^1/_3$? А пятиугольник?

2) Будем назыать число *квадратным*, если оно является площадью квадрата, нарисованного на клетчатой бумаге.

Все полные квадраты (1, 4, 9, 16, ...) являются квадратными числами — но есть и другие: например, $2 = 1^2 + 1^2$, $5 = 1^2 + 2^2$, $8 = 2^2 + 2^2$, $10 = 1^2 + 3^2$ — тоже квадратные числа. Как мы выяснили, квадратные числа — это те числа, которые можно представить как сумму квадратов двух целых чисел. Интересный вопрос, какие числа являются квадратными, а какие нет.

Ответить на него полностью сложно. Но можно про разные числа выяснять (например, используя компьютер), являются ли они квадратными (ответы для первых 20 чисел приведены ниже), а потом пытаться выдвигать на основе полученных данных какие-то гипотезы.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
+	+	−	+	+	−	−	+	+	+	−	−	+	−	−	+	+	+	−	−

Таблица 1: квадратные и неквадратные числа от 1 до 20

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
+	−	+	−	+	−	+	−	+	−

Таблица 2: квадратные и неквадратные *нечетные* числа от 1 до 20