

Сюжеты для размышлений

- ▷ **Игра в камни.** На столе лежат несколько кучек камней. Двое по очереди берут из них камни: каждым ходом — любое количество камней из одной кучки. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Исследовать, кто (начинающий или второй) может выиграть, как бы ни играл соперник (в зависимости от количеств камней в кучках).

Для разминки — случай двух кучек (не обязательно равных). Случай трех кучек уже вполне содержателен. Можно начать с концертных вариантов: например, 1, 2, 3 и 1, 3, 5. Для большего числа кучек можно начать, скажем, с игр в 1, 2, 3, 100, 100 и 1, 2, 3, 4, 100, 100, 100.

Пример интересных (и сложных) вопросов про общий случай:

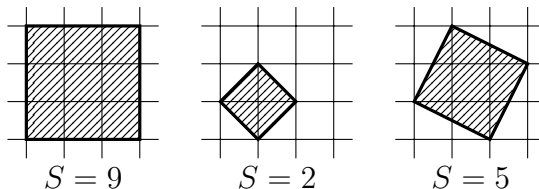
- В одной из куч больше камней, чем во всех остальных вместе взятых. Может ли так быть, что второй может выиграть, как бы ни играл первый?
- На столе лежит нечетное число камней. Может ли так быть, что второй может выиграть, как бы ни играл первый?

- ▷ **Угадывание с исправлением ошибок.** Петя загадал число а) от 1 до 4; б) от 1 до 8. Сколько вопросов (допускающих ответ «да»/«нет») необходимо задать Васе, чтобы определить это число? Ответ на этот вопрос (должен быть) хорошо известен. А вот сколько вопросов потребуется, если Петя может один раз солгать?

Достаточно ли, скажем, в варианте (а) 4 вопросов? А в варианте (б) 8 вопросов? 5 вопросов? Интерес представляют и примеры (как справится за такое-то количество вопросов), и оценки (почему такого-то количества вопросов не достаточно).

Отличается ли, кстати, ответ для «неинтерактивного» варианта задачи (т. е. если Вася должен заранее записать все свои вопросы на бумажке)? Что происходит для большего диапазона чисел и/или большего количества разрешенных неправильных ответов?

- ▷ **Косые квадраты.** Будем называть целое число «косым квадратом», если оно является площадью квадрата с вершинами в узлах сетки (со сторонами не обязательно идущими по линиям сетки). Ясно, что полные квадраты ($1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$ и т. д.) — косые квадраты. Но есть и другие: например, 2 и 5 (см. рис.).



Выяснить что-то про то, какие числа являются косыми квадратами, а какие нет.

Примеры доступных утверждений, которые можно доказывать: все косые квадраты являются целыми числами (а что, кстати, можно сказать про площади произвольных многоугольников с вершинами в узлах сетки?); произведение двух косых квадратов — косой квадрат (например, $10 = 2 \cdot 5$ является площадью квадрата — какого, кстати?); целое число является косым квадратом тогда и только тогда, когда оно является суммой двух полных квадратов (например, $2 = 1^2 + 1^2$, $5 = 2^2 + 1^2$).

Дальше стоит составить (возможно, используя компьютер) таблицы, в которых указано, какие числа являются косыми квадратами, а какие нет, и попытаться выдвинуть правдоподобную гипотезу об общем ответе (таблица для нечетных чисел от 1 до 19 уже наводит на некоторые размышления).