

Как найти сумму степеней?

Г. Мерзон*

декабрь '17

Как вычислить сумму чисел от 1 до n , хорошо известно: если сложить первое число с последним, второе с предпоследним и т. д., получается формула $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$. Но уже формулы для суммы первых нескольких квадратов, кубов или четвертых степеней менее известны, причем обычно с ними знакомят, сразу предлагая *доказать* неизвестно откуда взявшийся ответ¹.

Попробуем, наоборот, сначала понять, как найти утверждения, которые можно было бы доказывать (а уже потом кое-что, быть может, докажем)².

1. Начнем с сумм квадратов. Выпишем первые несколько из них: $1^2 + 2^2 = 5$, $1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$... В последовательности 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140... никакой закономерности, кажется, не видно (кроме того, конечно, что соседние числа отличаются на очередной квадрат). Хотелось бы как-то опереться на уже понятный случай — вычисление суммы $1 + \dots + n$. Запишем эти две последовательности сумм вместе.

*merzon@mccme.ru

¹Известны, конечно, и разные варианты *геометрического суммирования*. К сожалению, если для суммирования квадратов еще получается непосредственно обобщить вычисление суммы от 1 до n , то уже для суммы кубов вместо непонятно как полученного ответа сообщается, фактически, непонятно откуда взявшееся готовое решение (изящное, но еще более загадочное).

²Разумеется, это не является самым быстрым способом «попасть из пункта А в пункт Б». Читатель, желающий побыстрее узнать формулу для суммы $1^k + \dots + n^k$ вместе с ее доказательством, может почитать, например, статью [1].

n	1	2	3	4	5	6	7
$1 + \dots + n$	1	3	6	10	15	21	28
$1^2 + \dots + n^2$	1	5	14	30	55	91	140

Уже можно уловить наличие некоторой связи между двумя строками: для $n = 4$ нижнее число втрое больше верхнего... дальше, правда, такой делимости не видно (по крайней мере, до $n = 7$), но некоторые общие делители у чисел в одном столбце видны: 5 для $n = 5$, 7 для $n = 6$ и $n = 7$... Раз у чисел в одном столбце бывает большой общий множитель, запишем под каждым столбцом отношение чисел.

n	1	2	3	4	5	6	7
$1 + \dots + n$	1	3	6	10	15	21	28
$1^2 + \dots + n^2$	1	5	14	30	55	91	140
S_2/S_1	1	5/3	7/3	3	11/3	13/3	5

Теперь закономерность видна: с увеличением n на 1 частное увеличивается на $2/3$, т. е. это частное равно $(2n + 1)/3$. Вместе с формулой для $1 + 2 + \dots + n$ это дает следующий ответ.

Гипотеза 1. $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Отметим, что вычислительного эксперимента хватило небольшого и несложного. А вот осмысленное *представление информации* было очень существенно: если просто взять тетрадку и в случайных местах выписать разные суммы последовательных чисел и разные суммы квадратов, то заметить какую-либо закономерность малореально.

Попробуем продвинуться чуть дальше. Для этого вычислим несколько первых сумм кубов и несколько первых сумм четвертых степеней.

(Читателю в этом месте предлагается **остановиться** и, не заглядывая дальше, попробовать самому выписать таблицу из нескольких значений этих сумм и попытаться что-нибудь понять!)

n	1	2	3	4	5
$1 + \dots + n$	1	3	6	10	15
$1^2 + \dots + n^2$	1	5	14	30	55
$1^3 + \dots + n^3$	1	9	36	100	225
$1^4 + \dots + n^4$	1	17	98	354	979

Видно, что с кубами дело обстоит даже проще, чем с квадратами. Читатель, никогда раньше не видевший формулы для суммы $S_3(n) := 1^3 + \dots + n^3$, несомненно сможет ее, глядя на эту таблицу, угадать.

У $S_4(n)$ и $S_1(n)$ общих делителей (кроме 2) уже не видно. Но все же посмотрим: 98 явно делится на 7, как и соответствующая сумма квадратов, 14; у 30 и 354 есть общий делитель 6; 979 и 55 делятся на 11... — видимо на этот раз полезно посмотреть на отношение S_4/S_2 .

n	1	2	3	4	5	6
S_2	1	5	14	30	55	91
S_4	1	17	98	354	979	2275
S_4/S_2	1	17/5	7	59/5	89/5	25

Видно, что после домножения этого отношения на 5 получится последовательность целых чисел: 5, 17, 35, 59, 89, 125... Тут уже нельзя сказать, что разность соседних чисел неизменна... Все же посмотрим на эти разности: 12, 18, 24, 30... — закономерность сразу видна!

Упражнение 1. Предложите формулу³ для суммы $1^4 + \dots + n^4$.

Отметим, что в отличие от формул для $S_1(n)$, $S_2(n)$ и $S_3(n)$ эта формула *не раскладывается на линейные множители*. Вероятно, с этим связано и то, что ее невозможно (насколько известно автору) найти методами геометрического суммирования.

³Здесь и дальше «предложите формулу» означает, что достаточно найти правдоподобную (согласующуюся с имеющимися наблюдениями) гипотезу, доказательство не требуется.

2. Двигаться практически вслепую, просто смотря на числа, получающиеся как значения наших сумм, становится тяжело. «Только теория решает, что именно можно наблюдать» — чтобы двигаться дальше, нужно понять, какого рода ответы мы надеемся получить.

Самое общее, что можно сказать, глядя на формулы для $S_1(n)$, $S_2(n)$, $S_3(n)$, $S_4(n)$, — что все это некоторые *многочлены*⁴ от n . Раскроем в уже известных нам формулах все скобки и запишем их как многочлены.

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\ S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \end{aligned}$$

Теперь кое-что видно сразу.

Гипотеза 2. $S_k(n)$ — многочлен от n вида⁵ $\frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \dots$

Для гипотез про следующие коэффициенты маловато данных. (Разве что свободный член все время равен 0 — и это, пожалуй, понятно: значением S_k в нуле естественно считать нулевым как «сумму нулевого числа слагаемых».)

Но теперь понятно, как искать следующие формулы: если мы ожидаем, например, что

$$S_5(n) = \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + an^4 + bn^3 + cn^2 + dn,$$

то неизвестные коэффициенты можно найти по значениям $S_5(n)$ для небольших n .

Дальше любую конкретную формулу можно попробовать доказать по индукции. Но хотелось бы все-таки понять, почему такой рецепт нахождения формул приводит к правильным ответам.

⁴Отметим, что такая точка зрения совсем не самоочевидна — скажем, можно было надеяться (по крайней мере, до формулы для S_4) на ответ в виде произведения линейных функций. . .

⁵Многоточие заменяет члены меньших степеней.

Теорема 1. Пусть S_k — такой многочлен степени $k + 1$, что $S_k(n) = 1^k + \dots + n^k$ для $n = 0, 1, \dots, k + 1$. Тогда это равенство верно для всех натуральных n .

Доказательство. Как получается последовательность сумм степеней? Начинается она, можно считать, с нуля (для $n = 0$), а дальше каждый раз увеличивается на n^k . Значит, нам нужно доказать, что при увеличении аргумента многочлена S_k на единицу, от $n - 1$ до n , значение этой функции тоже увеличивается на n^k ,

$$S_k(n) - S_k(n - 1) = n^k.$$

Но для $n = 1, \dots, k + 1$ это равенство верно по условию. А в обеих частях равенства стоят *многочлены степени не выше k* (почему это верно про левую часть, кстати?) Значит, эти многочлены равны (их разность равна нулю, так как имеет степень не выше k , но больше k корней), что и требовалось доказать⁶. \square

В частности, теперь доказаны формулы, найденные нами экспериментально.

3. Теперь для любого конкретного k мы можем, в принципе, найти формулу для суммы $1^k + 2^k + \dots + n^k$. Можно было бы на этом остановиться, но хотелось бы понять, как связаны ответы для разных k (а в идеале — найти в том или ином смысле общую формулу, работающую для произвольного k).

Для этого полезно найти несколько следующих формул. Решать возникающие системы уравнений вручную быстро становится утомительным, имеет смысл воспользоваться компьютером (уже и для $k = 5$). В конце статьи приведена короткая программа, составляющая и решающая соответствующую систему уравнений.

Одна вещь после взгляда на результаты компьютерного эксперимента видна хорошо.

⁶Я благодарен Ф. В. Петрову, рассказавшему мне такое доказательство.

$$\begin{aligned}
S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 + 0 \\
S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 + 0 - \frac{1}{30}n \\
S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 + 0 - \frac{1}{12}n^2 + 0 \\
S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + 0 - \frac{1}{6}n^3 + 0 + \frac{1}{42}n \\
S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 + 0 - \frac{7}{24}n^4 + 0 + \frac{1}{12}n^2 + 0 \\
S_8(n) &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 + 0 - \frac{7}{15}n^5 + 0 + \frac{2}{9}n^3 + 0 - \frac{1}{30}n.
\end{aligned}$$

Гипотеза 3. После $\frac{1}{2}$ каждый второй коэффициент (при n^{k-2}, n^{k-4}, \dots) многочлена $S_k(n)$ равен 0.

Как эту гипотезу доказать? Знаем ли мы хоть какое-нибудь похожее утверждение? Все коэффициенты при четных / нечетных степенях многочлена равны нулю тогда и только тогда, когда этот многочлен является нечетной / четной функцией. Это подсказывает, что стоит изучить следующий вопрос.

Упражнение 2. Чему равно значение многочлена S_k в точке $-n$? Как оно связано со значениями S_k в целых положительных точках? (Если ответить не получается, перечитайте доказательство теоремы.)

Отметим, что для аргумента, не являющегося целым положительным числом, $S_k(x)$ уже не является какой-либо суммой (что могли бы значить слова «сумма k -х степеней последовательных чисел от 1 до $\sqrt{2}$ », например?) — но значение *многочлена* S_k в точке x определено в любом случае. То есть это пример вопроса, который невозможно было даже задать, пока мы думали в терминах таблиц значений сумм.

Упражнение 3. а) Выведите из результата предыдущего упражнения гипотезу 3.

б) Докажите также, что для нечетного k функция $S_k(n)$ является многочленом от $u := n(n+1)/2$ (ср. с тем, что четный многочлен является многочленом от $u := x^2$) — например, $S_3(n) = u^2$.

Остальные коэффициенты на первый взгляд кажутся довольно загадочными, но попытаемся разобраться. Начать естественно с коэффициентов при n^{k-1} : $1/6, 1/4, 1/3, 5/12, 1/2, 7/12, 2/3 \dots$ — если закономерности не видно, то приведем их к общему знаменателю: $2/12, 3/12, 4/12, 5/12 \dots$

Гипотеза 4. $S_k(n) = \frac{1}{k+1}n^{k+1} + \frac{1}{2}n^k + \frac{k}{12}n^{k-1} + 0 \cdot n^{k-2} + \dots$

Уже начинают проглядывать контуры какой-то общей (работающей для произвольного k) формулы, не правда ли?..

Упражнение 4. Уточните последнюю гипотезу: предложите формулу для коэффициента при n^{k-3} (если не выходит, посмотрите внимательно на треугольник Паскаля).

Дальше могут возникнуть некоторые гипотезы и про зависимость от k следующих коэффициентов. Попробуйте превратить их в удобный (не требующий решения систем уравнений) рецепт получения формулы для $S_{k+1}(n)$ из формулы для $S_k(n)$.

* * *

Мы только начали разговор про суммы степеней: за кадром остались все связи с геометрией, комбинаторикой, анализом; совсем не упоминался ключевой для этой задачи (но чудесным образом появляющийся в самых разных областях математики) объект — *числа Бернулли*... Несколько больше объясняется в заметке [2] (в частности, там можно найти ответы на вопросы из предыдущего абзаца вместе с доказательствами).

* * *

Я хотел бы поблагодарить А. И. Сгибнева и Г. Б. Шабата за полезные обсуждения, а также Н. Ю. Медведя за советы по Python.

Список литературы

- [1] *Абрамович В. С.* Суммы одинаковых степеней натуральных чисел // Квант, 1973, №5, 22–25.
http://kvant.mccme.ru/1973/05/summy_odinakovyh_stepenej_natu.htm
- [2] *Мерзон Г. А.* Алгебра, геометрия и анализ сумм степеней последовательных чисел // Матем. просв., сер. 3, вып. 21 (2017), 104–118.
<http://dev.mccme.ru/~merzon/pscache/bernoulli-mp.pdf>

Приложение. Приведем программу на Python, вычисляющую коэффициенты многочленов $S_k(n)$.

```
from sympy import Matrix, solve_linear_system

def S(k, n):
    return sum([i**k for i in range(1, n+1)])

def S_poly(k):
    values = Matrix([S(k, n) for n in range(1, k+2)])
    equations = Matrix([[n**(k+1-i) for i in \
        range(k+1)] for n in range(1, k+2)])
    return equations.LUsolve(values)

print(S_poly(6))
```