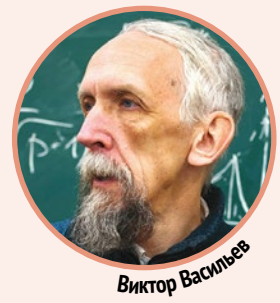
Математическое созвездие

В начале мая 2020 года стали известны имена десяти новых лауреатов премии Европейского математического общества. Ими стали:

Карим Адипразито (Karim Adiprasito, Еврейский университет в Иерусалиме / Копенгагенский университет)
Ана Караиани (Ana Caraiani, Imperial College London)
Александр Ефимов (МИАН, Москва)
Семён Филип (Simion Filip, Чикагский университет)
Александр Логунов (Принстонский университет)
Кайса Матомяки (Kaisa Matomäki, Университет Турку)
Фан Тан Нам (Phan Thành Nam, Мюнхенский университет имени Людвига и Максимилиана)
Жоаким Серра (Joaquim Serra, Швейцарская высшая техническая школа Цюриха)
Джек Торн (Jack Thorne, Кембриджский университет)
Марина Вязовская (Maryna Viazovska, Федеральная политехническая школа Лозанны)

В этом номере мы расскажем о нескольких лауреатах из разных стран мира. Возможно, кто-то из них станет лауреатом премии Филдса, вручение которой состоится уже через два года на Международном математическом конгрессе — 2022, который пройдет в Санкт-Петербурге.

Виктор Васильев, академик РАН, профессор факультета математики ВШЭ, президент Московского математического общества:


Виктор Васильев

Премия EMS — довольно хорошая молодежная премия, многие ее лауреаты достигают больших высот в математике. Среди лауреатов прошлых лет десятеро стали потом филдсовскими медалистами, в том числе Максим Концевич, Григорий Перельман, Андрей Окуньков и Станислав Смирнов; из математиков, работающих сейчас в Москве, эту премию получали еще Александр Кузнецов и Стефан Немировский. Оба лауреата нынешнего года российского происхождения получали премию Московского математического общества: Александр Ефимов в 2016, а Александр Логунов — в 2017 году. Восторгами по поводу работы еще одного лауреата, Марины Вязовской, я уже делился (см. trv-science.ru/2016/12/20/viktor-vasilev-mathwalks/).

На стыке двух математических цивилизаций

Антон Зорич

Антон Зорич, сотрудник Центра перспективных исследований Сколтеха, профессор Университета Париж VII:

Семёну Филипу (Simion Filip) 33 года. Родился он в Кишинёве. Кроме родного языка, английского, русского и французского, он знает еще и турецкий: школа, в которой он учился, была необычной. Преподавание таких предметов, как физика и химия, в старших классах велось на английском языке, а как иностранный язык учили турецкий. Семён с большой теплотой рассказывает о своих учителях. Успешное участие в международных олимпиадах позволило ему учиться в Принстонском университете. Во время обучения Семён приезжал на семестр в Москву в Независимый университет по программе Math in Moscow. Его дипломной работой в Принстоне руководила Мариам Мирзахани (Maryam Mirzakhani). После окончания университета Филип провел год в Кембридже, после чего пошел в аспирантуру в Чикагский университет к Саше Эскину (Alex Eskin) — соавтору Мариам.

Мирзахани и Эскин много лет работали вместе над очень трудной задачей и решили ее как раз в те годы, когда Семён Филип учился в аспирантуре у Эскина. За цикл работ, включающий решение этой задачи, Мариам Мирзахани получила в 2014 году Филдсовскую медаль (а Саша Эскин получил в 2019 году Breakthrough Prize); Семён Филип тоже участвовал в этом проекте. В короткой речи на церемонии вручения Мариам Мирзахани Филдсовской медали Курт Макмаллен (Curt McMullen, лауреат Филдсовской премии 1998 года) выделил три фундаментальных результата в этом цикле работ: классификацию инвариантных мер, полученную Мирзахани и Эскиным; топологическую классификацию, полученную Мирзахани, Мохаммади и Эскиным; и алгебраическую структуру, найденную Семёном Филипом.

То, что Семёну удалось получить очень глубокие результаты уже в аспирантуре, не случайность. Семён Филип — универсал. Специалистов, которые так же глубоко, как он, разбираются и в теории динамических систем, и в алгебраической геометрии, в мире почти нет. Семён работает на стыке этих двух областей. Он изучает динамические системы на пространствах модулей комплексных кривых (то есть то, как накручиваются на себя римановы поверхности под действием специального класса деформаций) и на пространствах модулей поверхностей Калаби — Яу (за такую динамику отвечают композиции многих-многих отображений специальных четырехмерных симплектических многообразий).

За серию блистательных результатов в этой очень активно развивающейся области современной математики Филип получил одну из десяти премий Европейского математического общества 2020 года. Эти премии присуждаются раз в четыре года молодым математикам; они приурочены к Европейскому математическому конгрессу.

После защиты диссертации в 2016 году престижная стипендия Клея позволила Семёну провести три года в Гарварде, где у него был особый статус junior fellow. С осени 2019 года Семён Филип работает в Чикагском университете. Его чудесная обаятельная жена Талия пишет диссертацию о взаимодействии искусства, науки и технологии во второй половине XX века.

Семён совершенно не вписывается в образ «чокнутого гения не от мира сего». Он универсал и в обычной жизни. Ума не приложу, когда и как он успевает прочесть массу книг, посмотреть море фильмов, провести время с племянниками в Бухаресте и друзьями в Кишинёве. Я его знаю уже десять лет и ни разу за это время не видел в нем признаков стресса, спортивного азарта соперничества или нервозной лихорадки от ощущения близости решения. Но при всей внешней мягкости и расслабленности, когда он начинает говорить о математике, диву даешься, насколько точны и ясны его формулировки, сколько он всего знает и насколько разными техниками свободно владеет.

Я должен пояснить, чем, собственно, удивительна разносторонность Семёна. Дело в том, что до недавнего времени теория динамических систем и алгебраическая геометрия казались бесконечно удаленными друг от друга — и по тому, какие объекты они изучают, и по технике исследования, и даже по эстетическим критериям. При изучении динамических систем вы изучаете только асимптотическое поведение сложной системы: условно говоря, вас интересует то, что произойдет через сто, тысячу или миллион лет, а не детали текущего момента; кроме того, почти всегда вы рано или поздно с фатальной неизбежностью наталкиваетесь на объекты причудливой фрактальной природы. Для изучения динамических систем часто используют численные методы и моделирование на компьютере.

Алгебраическая геометрия — прямая противоположность этому. Для нее характерна изысканность формы и кристальная отточенность алгебраической структуры. Красивая теорема в алгебраической геометрии как хорошее стихотворение, в котором ни одно слово нельзя заменить. До недавнего времени большинство алгебраических геометров относились к самой идее компьютерного эксперимента в математике как к чему-то постыдному: доказательство должно быть получено силой разума, а не унизительным компьютерным перебором.

Когда «динамистам» удается строго доказать, что размерность объекта, с которым он или она работают, не 1 (как у линии) и не 2 (как у поверхности), а некое неизвестное число, зажатое в интервале между 1,6 и 1,8, — они счастливы: им это кажется красотой необыкновенной. Для большинства алгебраических геометров такой объект выглядит по меньшей мере отталкивающим, если не омерзительным. Специалистам по динамике, в свою очередь, многие результаты алгебраической геометрии со стороны кажутся слишком абстрактными. Большая часть «динамистов» считает, что они исследуют уже существующие явления из «реальной жизни», в то время как многие алгебраические геометры уверены, что они единоличные творцы своей вселенной.

Еще десять лет назад многим профессиональным алгебраическим геометрам высокого класса ни разу в жизни не доводилось слышать об эргодической теореме (которую знает любой студент, интересующийся динамикой), а многим специалистам по динамике высокого класса было неведомо понятие степени расслоения (которое знает любой студент, интересующийся алгебраической геометрией). Упрощая, можно сказать, что до недавнего времени теория динамических систем и алгебраическая геометрия сосуществовали как две цивилизации, не подозревающие друг о друге. Можете себе представить, сколько новых и красивых результатов (включающих результаты Мирзахани, Мохаммади, Филипа и Эскина, упомянутые выше) удалось получить, когда эти две развитые и мощные цивилизации начали взаимодействовать!

«Я изучаю динамические системы»

Семён Филип

Семён Филип, исследователь на факультете математики Чикагского университета, ответил на несколько вопросов нашей газеты.

— Как вы решили прийти в математику? Были ли сомнения в выборе?

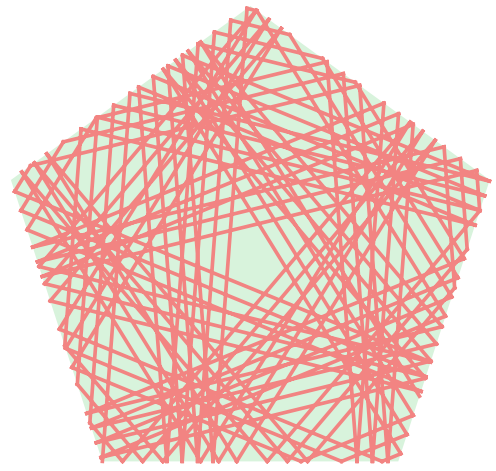
— Когда я учился во втором классе, наша учительница записала всех желающих на математический конкурс для младшеклассников, под названием «Кенгуру». Мне это занятие — обдумывать математические головоломки — очень понравилось, и к тому же я выступил приличнее, чем ожидал. В школе участие в математических олимпиадах позволило мне лучше познакомиться с предметом, и так я понял, что заниматься математикой мне интересно. Куда важнее было то, что меня окружали друзья, которые тоже интересовались математикой, информатикой или физикой; также нами руководил отличный учитель — Марчел Викторович Телеукэ.

В университете я быстро понял, что математика обширна и необъятна и сильно отличается от моих школьных представлений. Тем не менее мне было интересно учиться дальше, и опять мне повезло с хорошими руководителями. Я ходил на курсы и семинары, которые организовывал Яков Григорьевич Синай, а на последнем курсе, под руководством Марьям Мирзахани, познакомился с исследовательской работой. Тогда я решил поступить в аспирантуру. У своего научного руководителя Алекса Эскина я очень многому научился — и математике, и тому, как подходить к исследовательским задачам.

Были ли сомнения? Конечно. Например, в школьные годы мне была очень интересна информатика, и какое-то время в университете я рассматривал ее как возможное направление работы. Мне кажется, что на разных этапах наличие активной группы людей, которые интересовались математикой и с которыми мне было интересно проводить время, сыграло важную роль в том, что я продолжал заниматься математикой. Конечно, работать приходится очень долго одному, но потом всегда хочется с кем-то поделиться мыслями, и приятно, когда кому-то другому это тоже интересно.

— Как бы вы описали область ваших математических интересов?

— Я изучаю динамические системы. Общая цель работ в этой области — понять, как себя ведут системы, которые, следуя некоторому закону, меняются со временем. Сами системы и законы могут прийти откуда угодно, например из физики, биологии или экономики.


Траектории бильярдных шаров в столах необычной формы. Рис. С. Филипа

Круг вопросов, которые можно изучать строгими математическими методами, очень ограничен. Например, мы не можем сделать прогноз погоды на 20 дней вперед и, наверное, никогда не сможем, вне зависимости от прогресса в компьютерах.

Замечу, что само понимание того, почему такие предсказания невозможны, есть результат математических исследований, которые, в свою очередь, указали на более осмысленные вопросы и методы изучения динамических систем. Оказалось, что многие динамические системы связаны неожиданным образом с другими разделами математики, такими как алгебраическая геометрия и теория чисел. Пример динамической системы, которая моделирует элементарные физические явления и очень интересна математикам, — это движение бильярдного шара на столе необычной формы — как, например, пятиугольник или многоугольник в форме латинской буквы L.

Некоторые мои работы связаны с изучением таких систем или, точнее, пространства всех систем такого типа.

— Не могли бы вы в научно-популярном формате (нас читают не только физики, но и филологи) описать тот результат, который был отмечен премией Европейского математического общества?

— Рискуя расстроить математиков и запутать всех остальных читателей, я попробую. Вспомните об окружностях на плоскости, которые проходили в школе. Точки на окружности можно описать через угол, а можно — спроектировав окружность на прямую. Это принципиально разные описания одного и того же объекта. Обобщение этих двух методов на более сложные фигуры и в более высоких размерностях породило два разных подхода к геометрии, которые называются алгебраической и аналитической геометрией. Некоторые задачи легче решить с помощью одного подхода, некоторые — с помощью другого, а иногда между этими подходами есть интересная связь. Например, если вы разделите окружность на 17 равных кусков, как торт, то это легко описать углами, но, оказывается, очень интересно описать это через проекцию на прямую. (Почему 17? Надеюсь, что ваши читатели найдут в Интернете ответ на этот вопрос.)

Как я говорил выше, моя работа связана с динамическими системами на поверхностях. Геометрия поверхности, а также геометрия пространства всех поверхностей заданного типа могут быть описаны весьма разными способами, похожими на то, как я описал окружность выше. Суть моей работы была в доказательстве связи между двумя способами описания поверхности, а также в исследовании того, как это описание влияет на динамические системы на этой поверхности.

Подробнее см. math.uchicago.edu/~sfilip/

Марина Вязовская и задача о плотнейшей упаковке шаров

Теренс Тао, лауреат премии Филдса, профессор математики в Калифорнийском университете в Лос-Анджелесе (США)

Теренс Тао (math.ucla.edu)

Известность Марине Вязовской принесли ее работы по решению задачи об упаковке шаров в высоких размерностях. В этой задаче ставится вопрос, каков плотнейший способ упаковки единичных неперекрывающихся сфер (или шаров) в евклидовом пространстве. В пространстве размерности 1 мы можем полностью покрыть всю прямую. На плоскости (n = 2) в 1773 году Лагранжем было показано, что гексагональная упаковка наиболее плотна. В 1611 году Кеплер выдвинул печально известную гипотезу, что в пространстве плотнейшими упаковками являются кубическая плотная упаковка и гексагональная плотная упаковка (плотность у них одинаковая). И в 1998 году эта гипотеза была доказана Томасом Хейлсом с привлечением больших компьютерных вычислений.

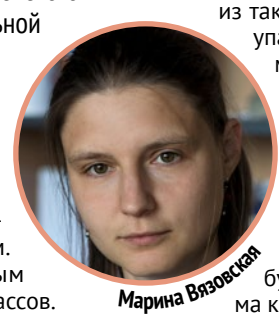
Итак, до недавнего времени эта задача была полностью решена только для размерностей 1, 2 и 3. Однако в 2016 году Марина Вязовская сделала поразительный прорыв, решив проблему плотнейшей упаковки для восьмимерного пространства, показав, что исключительно симметричная упаковка (известная как корневая решетка группы E8) является наиболее плотной. И менее чем через неделю после этого Вязовская вместе с Генри Коном, Абхинавом Кумаром, Стефаном Миллером и Данило Радченко решила эту же задачу для 24-мерного пространства. Ими было показано, что замечательная решетка Лича является наиболее плотной упаковкой.

Эти два измерения, 8 и 24, были давно известны как особенные, благодаря существованию исключительно симметричных решетчатых упаковок. В 2003 году Генри Кон и Ноам Элкис (опираясь на работы Дельсарта) предложили использовать методы линейного программирования для продвижения в решении задачи упаковки сфер, что в принципе могло решить задачу о плотнейшей упаковке шаров в пространствах этих двух размерностей. Однако для продвижения по этому пути они нуждались в существовании «магической функции» с замечательными Фурье-аналитическими свойствами.

Несмотря на убедительные численные свидетельства, что такая магическая функция существует, они были неспособны построить такую функцию. Искусно используя свойства (квази) модулярных форм, Вязовская смогла построить требуемые магические функции и проверить их свойства, завершив решение задачи упаковки шаров для этих двух размерностей. Затем Марина адаптировала эти конструкции для получения дальнейших результатов в анализе Фурье, связанных с принципом неопределенности и формулой суммирования Пуассона.

«Мои любимые задачи — об оптимальных конфигурациях в метрических пространствах»

Марина Вязовская, выпускница Киевского университета, профессор Федеральной политехнической школы в Лозанне (Швейцария), ответила на несколько вопросов нашей газеты.


Марина Вязовская

— Как вы решили прийти в математику? Были ли сомнения в выборе?

— Мой путь в математику был довольно обычным и неинтересным. Математика была моим любимым предметом начиная с младших классов. Мне нравилась строгость и простота математических законов, позволяющих самостоятельно находить ответы на сложные и неочевидные вопросы. В старших классах я перешла из обычной школы в физико-математический лицей. Атмосфера физмат-школы, дух соревнования и огромная поддержка учителей сделали мое решение дальше изучать математику простым и естественным.

Сомнения в том, какую профессию выбрать, возникли в конце четвертого курса, когда пришло время искать работу. Но как раз в это время я получила свой первый научный результат и увидела, что доказывать собственные теоремы намного интереснее, чем изучать уже готовые теории или решать искусственно придуманные олимпиадные задачи. Я поняла, что ни в какой другой профессии мне не будет так интересно.

— Как бы вы описали область ваших математических интересов?

— Я занимаюсь теорией чисел. Теория чисел нравится мне тем, что очень трудно придумать математическую задачу, которая не была бы с ней связана. Мы не знаем, какие методы понадобятся математикам, чтобы решить гипотезу Римана, Бёрча — Свиннертон-Дайера или ABC-гипотезу. Конечно, нельзя объять необъятное, и мои любимые задачи — это задачи об оптимальных конфигурациях в метрических пространствах.

— Не могли бы вы в научно-популярном формате (нас читают не только физики, но и филологи) описать тот результат, который был отмечен премией Европейского математического общества?

— Мне присудили премию за решение одной из таких задач — задачи о плотнейшей упаковке шаров в пространствах размерности 8 и 24. В этой задаче ставится вопрос, какое наибольшее количество шаров радиуса 1 может уместиться в большой (очень широкой, длинной и высокой) коробке. Если все размеры коробки достаточно велики по сравнению с шарами, то это количество будет в основном зависеть от объема коробки и мало зависеть от ее формы, а отношение максимального количества шаров к объему будет стремиться к некоторому постоянному числу, оптимальной плотности.

Задача об оптимальной упаковке в размерности 3, известная как задача Кеплера, была решена в 1998 году Томасом Хейлсом. И такая история очень типична в теории чисел, когда «безобидный» и даже наивный вопрос ждет своего решения несколько столетий. Оптимальные конфигурации, достигающие максимальной плотности, были известны Кеплеру и его современникам, но математическое доказательство их оптимальности стало возможно лишь в наше время благодаря развитию теоретических знаний и вычислительной техники.

Мне удалось решить аналогичную задачу в размерностях 8 и 24. В этом случае оптимальные конфигурации тоже были известны, и весь «фокус» был в том, чтобы доказать оптимальность.

people.epfl.ch/maryna.viazovska

Интервью с Александром Логуновым и Александром Ефимовым
см. на следующем развороте

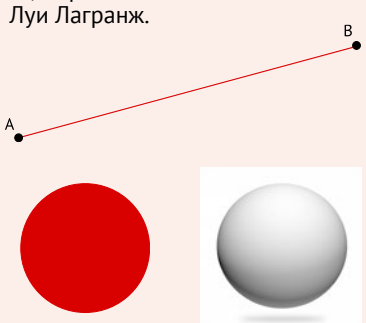
Плотные упаковки шаров

Михаил Цфасман, гл. науч. сотр. ИППИ РАН, directeur de recherches au CNRS, проректор Независимого московского университета:

Шар — это множество точек, отстоящих от центра на расстояние, не превосходящее радиуса. На прямой этому же определению удовлетворяет отрезок, на плоскости — круг.

Как плотно уложить равные отрезки на прямой? Очевидно, кладем отрезки встык — они покрыли всю прямую. А круги на плоскости? Тоже понятно: кладем круги по одной линии, скажем горизонтальной, потом выше и ниже кладем круги в параллельную линию, но сдвигая их так, чтобы эта линия была возможно ближе к первоначальной, и так далее. Просто и всем ясно, что плотнее нельзя. А как это доказать? Вы будете смеяться, но доказательство было получено только в середине XX века (Ласло Фейеш Тот, 1940), и оно весьма непросто.

Если разрешать укладывать круги только очень регулярным образом, так, чтобы центр одного из кругов был в начале координат, а сумма и разность центров кругов была также центром (такие упаковки называются решетчатыми, или просто решетками), то задача сильно упрощается, ее решил еще в XVIII веке Жозеф Луи Лагранж.



Одномерный, двухмерный и трехмерный шар

А как укладывать равные шары в трехмерном пространстве? Известного английского поэта, адмирала и пирата, закончившего свою жизнь на эшафоте, сэра Уолтера Рэли этот вопрос интересовал с точки зрения укладки пушечных ядер на корабле. Он задал его своему советнику по науке, одному из лучших ученых того времени Томасу Хэрриоту, который записал свои размышления по этому поводу в письме к Иоганну Кеплеру. Тот опубликовал этот вопрос в своей книге про форму снежинок — с тех пор эта проблема называется задачей Кеплера.

Положим шары на стол так, чтобы их проекции на стол образовывали плотнейшую упаковку кругов, и склеим шары между собой. Возьмем второй экземпляр такого же слоя шаров, приподнимем его и положим сверху так, чтобы он был возможно ниже, т. е. так, чтобы шары второго слоя легли в углубления первого. Потом третий слой, и так далее. Получим упаковку всего пространства, в ней каждый шар касается шести других. Так торговцы фруктами укладывают апельсины на прилавке. Опять же, очевидно, что лучше нельзя. То, что более плотных решеток не бывает, доказал Карл Фридрих Гаусс, а вот то, что никаких более плотных упаковок не бывает, доказал Томас Хейлс в самом конце XX века. Мало того что доказательство очень длинное, сложное и непрозрачное, оно еще и использует большие компьютерные вычисления.

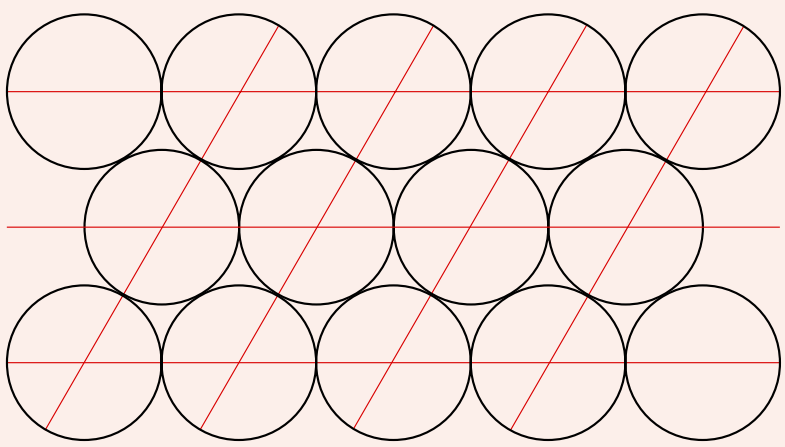
А в четырехмерном пространстве? Можно перейти от трехмерного к четырехмерному так же, как мы переходили от плоскости к трехмерному пространству. Будет ли эта упаковка плотнейшей? Среди решеток — да, а среди всех упаковок — этого мы не знаем и вряд ли будем в ближайшее время знать.

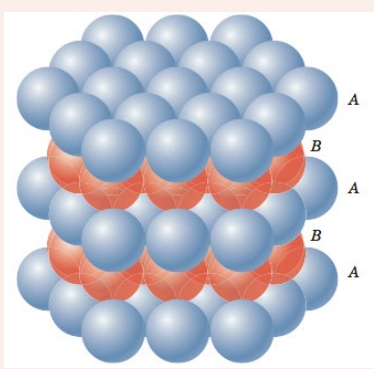
В высоких размерностях метод слоев работает плохо, но до размерности 8 им можно пользоваться, применяя различные дополнительные хитрости.

До размерности 8 включительно и, неожиданно, в размерности 24 мы знаем плотнейшие решетчатые упаковки. Почему именно для 8 и 24? Оказывается, что именно в этих размерностях кандидаты в плотнейшие упаковки имеют необыкновенно много симметрий. Для общей задачи Генри Кон и Ноам Элкис придумали изящный вариант метода линейного программирования, позволивший доказать, что наибольшая возможная плотность очень близка к плотности известных нам упаковок. Особенно хорошее приближение у них получается в размерностях 8 и 24, так как там наилучшие решетки обладают огромным количеством симметрий. Так, для 24 порядок разницы не превышает 10^{-30}. Этот метод требует аккуратного выбора так называемой тест-функции. Тест-функции можно улучшать, хоть это и очень непросто. А можно ли выбрать такую тест-функцию, чтобы она решила нашу задачу точно?

С этой задачей в 2016 прекрасно справилась Марина Вязовская. Будучи ученицей Дона Цагира, она занималась теорией модулярных форм — функций, которые хорошо себя ведут при преобразовании группами симметрий плоскости Лобачевского. Именно среди комбинаций модулярных форм ей удалось найти оптимальные тест-функции, полностью решающие задачу, сперва для размерности 8, а затем (в соавторстве с Коном, Кумаром, Миллером и Радченко) и в размерности 24. Блестящее и неожиданное достижение!

Для размерностей от 4 до 7, от 9 до 23 и больше 25 проблема до сих пор открыта и, видимо, очень трудна.


Решетчатая упаковка кругов (слоистая, плотнейшая)



Callister & Rethwisch 5e

Слоистая упаковка (не решетчатая, но тоже плотнейшая)

Фото JJ Harrison

Плотнейшая упаковка апельсинов

math.mit.edu

Решетчатая упаковка ядер (слоистая, плотнейшая)

А что делать для совсем больших размерностей? Здесь приходится быть много скромнее. Не надеясь на обнаружение плотнейшей упаковки шаров, мы просто ищем достаточно плотные упаковки; каждый новый рекорд — уже победа. Автор этих строк предложил использовать для построения плотных упаковок в очень высокомерных пространствах конструкции из алгебраической теории чисел и алгебраической геометрии над конечным полем. Получаются хорошие упаковки, но хотелось бы еще лучше. Поиск продолжается.

В заключение заметим, что эта красивая математическая задача полезна не только для укладывания пушечных ядер и апельсинов. Она тесно связана с геометрией, алгеброй, теорией чисел и даже с теорией передачи и хранения информации.

Игра в кубики и колебания мембран

Фёдор Назаров, профессор Кентского государственного университета (США)

Михаил Содин, профессор Тель-Авивского университета (Израиль)

Однажды на каком-то заводе упорно отказывался работать сложный прибор, и ни один специалист не мог ничего поделать. Пришел молодой человек, внимательно осмотрел со всех сторон хитроумное устройство, походил, подумал, почесал затылок, взял обычный молоток, ударил по прибору, и прибор заработал. Человека этого щедро наградили. Но многие удивились, что за удар молотком можно заслужить высокую награду. Тогда им объяснили, что награда выдана не за сам удар, а за знание, куда именно ударить.

Фёдор Назаров (kent.edu)

Михаил Содин

Нечто подобное недавно случилось в математике. Наградой стала (среди прочих) премия Европейского математического общества за 2020 год, которая присуждается раз в четыре года десяти исследователям не старше 35 лет в знак признания их выдающегося вклада в математику. В качестве «сложного прибора» выступила (да простит нас неискушенный в математике читатель) «нодальная геометрия решений эллиптических дифференциальных уравнений», «молотком» стали комбинаторно-геометрические соображения, доступные студенту младших курсов, а молодого человека звали Александр Логунов.

Теперь обо всем по порядку. Истоки нодальной геометрии восходят к опытам Гука и Хладни, в которых мелкий песок, насыпанный на колеблющуюся пластинку, собирался в узловые линии, образующие причудливые узоры, зависящие от формы пластины и частоты колебания. Эти линии состоят из точек пластины, которые остаются неподвижными. Читатель найдет многочисленные иллюстрации этих опытов, набрав в Google «фигуры Хладни».

Разнообразные вопросы об узловых линиях, возникающих при колебаниях, интригуют ученых более 200 лет. Премия, полученная Александром Логуновым, была не первой наградой за работы в этой области. Еще в 1809 году после визита Хладни в Париж Французская академия наук объявила конкурс, целью которого было «построить математическую теорию упругих поверхностей и указать, насколько она согласуется с опытными данными». Премия была выдана в 1816 году Софи Жермен, а законченную математическую модель немного позднее построил Густав Кирхгоф.

Следует отметить, что более непосредственное отношение к работам Логунова имеет теория колебаний не жестких пластин, а гибких упругих мембран (отличие в том, что мембрана сопротивляется только растяжению, а пластина дополнительно еще и изгибанию и сжатию, что приводит к более сложной математической модели). Мембрана при этом может быть любой формы: плоской с закрепленными краями, сферической, в виде бублика и т. п., может быть и многомерной.

Согласно одному из основных принципов теории малых колебаний функция, описывающая отклонение мембраны от положения равновесия, представляется в виде наложения (т. е. суммы) простейших собственных колебаний. Каждое собственное колебание происходит с определенной частотой ω и описывается математически произведением $v_\omega(x)\cos(2\pi\omega t)$, где t — время, а $v_\omega(x)$ — так называемая собственная функция, зависящая лишь от точки x мембраны.

С точки зрения дифференциальных уравнений собственные функции v_ω есть решения уравнения $\Delta v_\omega + 4\pi^2\omega^2 v_\omega = 0$, а узловые линии (множества, в размерности 3 и выше) — это просто точки x, удовлетворяющие условию $v_\omega(x) = 0$. Символом Δ здесь обозначен вездесущий оператор Лапласа, явное выражение для которого зависит от выбранной системы координат и упругих свойств мембраны.

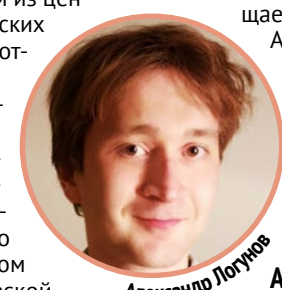
В случае плоской однородной мембраны, представленной в обычных декартовых координатах, он имеет вид $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Приведенное выше уравнение для собственных функций оператора Лапласа возникает повсеместно и в других разделах математики и физики, от геометрии и теории вероятностей до квантовой механики. Поэтому неудивительно, что поведение собственных функций и их узловых линий является объектом пристального изучения. Несмотря на это, многие задачи остаются нерешенными до сих пор.

По-видимому, самой известной из задач об узловых множествах стала гипотеза Яу Шинтуна об их размере, высказанная более 40 лет назад. Она утверждает, что этот размер (длина в размерности 2, площадь в размерности 3 и т. д.) всегда растет как линейная функция частоты ω. В случаях, когда колеблющаяся мембрана обладает дополнительными симметриями, собственные функции иногда удается найти в явном виде. В отсутствие симметрий для собственной функции невозможно написать явное выражение, и для оценки размера узлового множества обычно разбивают мембрану на маленькие квадратики, оценивают размер в каждом из них, а потом складывают результаты.

Было замечено, что удобным инструментом для таких оценок является индекс удвоения $N(Q) = \ln\frac{\max_{2Q}|v_\omega|}{\max_Q|v_\omega|}$, измеряющий, насколько быстро увеличивается максимум модуля функции при переходе от куба Q к кубу $2Q$ с тем же центром, но вдвое большей стороной. Полезным является такой факт: если индекс удвоения остается ограниченным, то ограничен и размер части узлового множества, попавшей в куб Q.

Первое значительное продвижение в гипотезе Яу получили около 30 лет тому назад Харольд Доннелли (Harold Donnelly) и Чарльз Феффермaн (Charles Fefferman). Они доказали, что для любого квадрата индекс удвоения собственной функции оценивается сверху частотой колебания. Следующее продвижение в этом круге задач принадлежит Николаю Надирашвили. Он заметил, что вопросы, заданные Яу Шинтуном, могут быть сведены к близким вопросам для существенно более простого класса гармонических функций. Так называются решения уравнения $\Delta v = 0$ (они описывают стационарные состояния мембран). Среди вопросов Надирашвили был, например, такой: верно ли, что любая непостоянная гармоническая функция в трехмерном пространстве обращается в ноль на множестве бесконечной площади? (Аналогичное утверждение на плоскости является несложным упражнением.)

На протяжении 25 лет столь невинный вопрос об одном из центральных математических объектов оставался открытым.



Александр Логунов

После работ Доннелли, Феффермана и Надирашвили стало ясно, что принципиальным является вопрос о том, что происходит с индексом удвоения гармонической функции при измельчении квадрата (или куба в больших размерностях) на мелкие кусочки. Несмотря на усилия многих математиков, никакого продвижения в этом вопросе не было до появившихся в 2016 году работ Александра Логунова и Евгении Малинниковой.

В их основе лежала следующая изящная комбинаторная лемма (мы ограничимся лишь плоским случаем, уже содержащим основные трудности). Пусть гармоническая функция имеет большой индекс удвоения N в единичном квадрате. Тогда, если нарезать этот квадрат на A^2 достаточно маленьких квадратиков одинакового размера, то не более чем в $A/2$ из них индекс удвоения может превысить $N/2$. Эта лемма привела к доказательству упомянутой выше гипотезы Надирашвили и части гипотезы Яу, а чуть позднее — к доказательству того, что длина узловых линий собственного колебания однородной плоской мембраны, зажатой на краю, растет как линейная функция частоты.

В заключение несколько слов о самом Александре Логунове. Александр вырос в Перми и в Санкт-Петербурге. Как и многие петербургские математики, он окончил одну из математических школ города (239-ю). В 2015 году он защитил кандидатскую диссертацию, выполненную под руководством Виктора Петровича Хавина. После двух лет, проведенных в Тель-Авиве, Александр перебрался в Принстон, где работает до настоящего времени. Он по-прежнему регулярно навещает и Санкт-Петербург, и Тель-Авив и успешно продолжает решать другие, столь же трудные и увлекательные, задачи.

«Я занимаюсь нодальной геометрией»

Александр Логунов, Assistant professor Принстонского университета (США), ответил на несколько вопросов нашей газеты.

— Как вы решили прийти в математику? Были ли сомнения в выборе?

— Будучи школьником 12 лет, я случайно попал в замечательный математический кружок при физико-математическом лицее № 239 Санкт-Петербурга, который сыграл огромную роль в моем образовании. Я до сих пор поддерживаю контакт с этой крайне успешной системой кружков и олимпиад. На первом курсе я получил разрешение учиться одновременно на двух направлениях: математика и экономика. Через две недели после начала занятий мне стало очевидно, что мое, а что нет.

— Как бы вы описали область ваших математических интересов?

— Анализ (наука о неравенствах), геометрия, математическая физика.

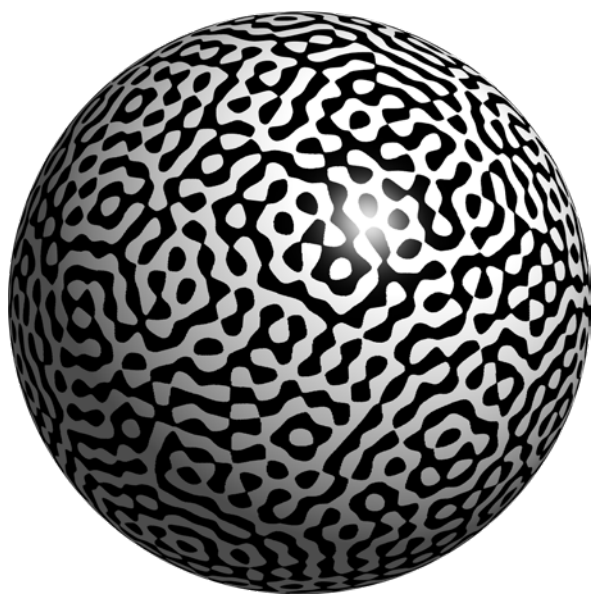
— Не могли бы вы в научно-популярном формате (нас читают не только физики, но и филологи) описать тот результат, который был отмечен премией Европейского математического общества?

— В представлении к премии нигде об этом не говорится. Последние пять лет я занимаюсь нодальной геометрией.

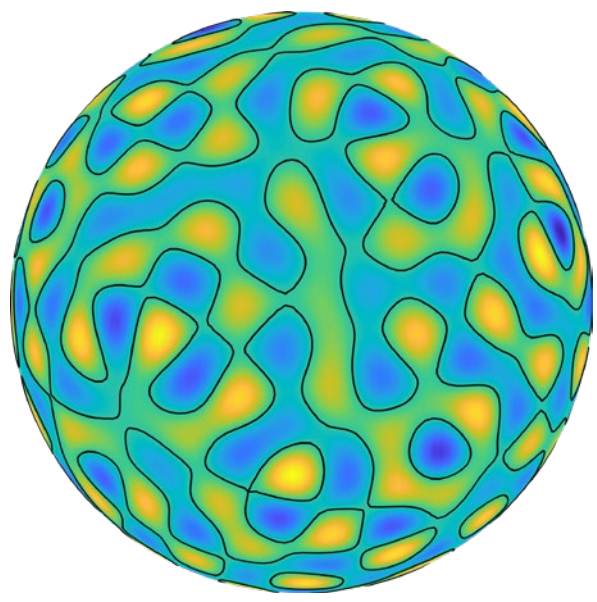
Термин «нодальные множества» придумали физики для обозначения удивительных линий, отчетливо видных, например, в эксперименте Хладни, в котором по металлической пластинке проводят смычком, и она резонирует.

На нодальные множества обратили внимание независимо друг от друга такие физики, как Леонардо да Винчи, Галилео Галилей, Роберт Гук, а систематически изучал и описал их Эрнст Хладни. Наполеон был так впечатлен резонансным экспериментом Хладни, что предложил Французской академии наук назначить премию за лучшее математическое объяснение этого эксперимента. После назначения премии французские физики и математики годами спорили, каким же уравнением описываются нодальные множества.

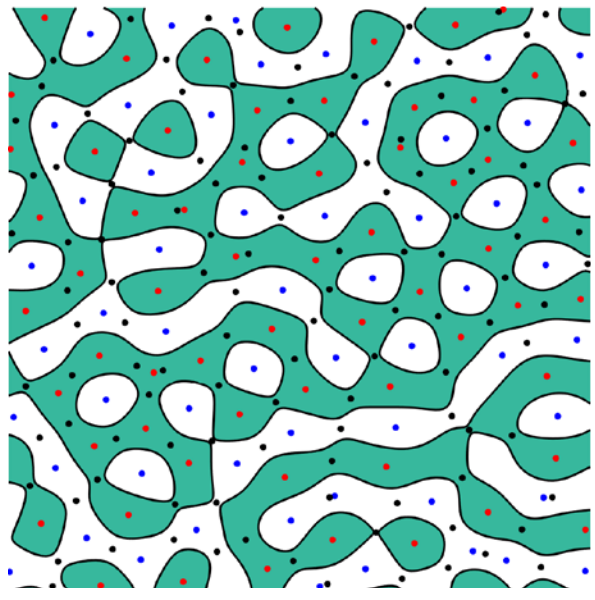
В 1816 году премию получила Софи Жермен (Marie-Sophie Germain, 1776–1831). Благодаря ей мы знаем, что нодальные множества — это нули решений эллиптических уравнений, которые математики изучают и пытаются объяснить на абстрактном уровне. Про нодальные множества можно легко придумывать математические вопросы — надо просто смотреть на картинки, которые сделали физики, и пытаться доказать или опровергнуть то, что глазами видно. Самый известный вопрос — это гипотеза Яу (в честь Яу Шинтуна), которая говорит, как связана длина нодальных линий с частотой.



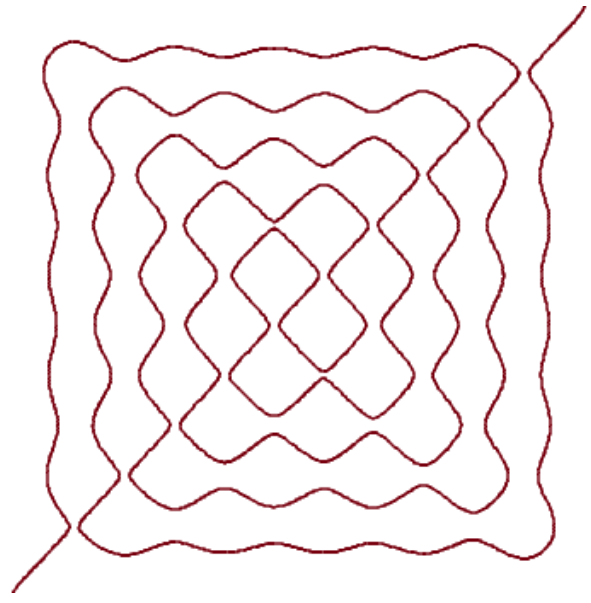
Знак случайной сферической гармоники



Распределение значений случайной сферической гармоники



Критические точки решения уравнения Гельмгольца



Нодальная кривая из диссертации А. Стерн

Рис. Д. Беляева и А. Логунова

Редакция благодарит Дмитрия Беляева за любезно предоставленные иллюстрации