# Геометрические вероятности

**Н.Б.ВАСИЛЬЕВ**

В ЭТОЙ СТАТЬЕ МЫ НЕ БУДЕМ заниматься строгим определением основных понятий теории вероятностей, а познакомимся с некоторыми задачами, где посчитать вероятности событий помогают соображения симметрии, а также наглядное изображение событий с помощью координат на плоскости.

При этом мы будем иметь дело не только с задачами, где имеется конечное число равновозможных вариантов, но и с такими, где вариантов бесконечно много. Вот две из них.

**Задача о встрече.** *Двое приятелей договорились встретиться на площади Маяковского от* 12 *до* 13 *часов. Каждый приходит в некоторый случайный момент времени, ждет* 15 *минут другого и уходит. Какова вероятность, что они встретятся?*

**Задача об остроугольном треугольнике.** *На окружности случайно выбираются три точки. Какова вероятность, что треугольник с вершинами в этих точках – остроугольный?*

Но начнем мы все же с более простых, конечных примеров.

## Бросаем кубик

Самый удобный инструмент для первого знакомства с вероятностями – игральная кость: кубик, грани которого занумерованы числами 1, 2, …, 6.

Поскольку кубик совершенно симметричен, мы считаем, что все шесть возможных вариантов имеют одинаковую вероятность. Скажем, вероятность выпадения шестерки равна $1/6$, вероятность, что выпадет число

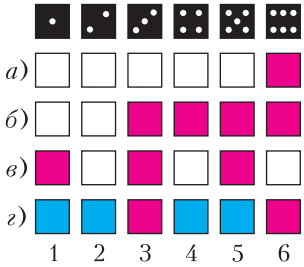



*Рис. 1*

не меньшее 3, равна $4/6 = 2/3$, вероятность, что выпадет нечетное число очков, равна $1/2$. (Соответствующие *события* – множества «благоприятных исходов» – показаны красным цветом на рисунках 1,*а–в*.)

Если под рукой нет игрального кубика, с таким же успехом можно катить по столу шестигранный карандаш, на гранях которого написаны номера 1, 2, …, 6. Легко представить себе карандаш не с 6, а с любым числом $n$ боковых граней.

Итак, пусть у нас есть инструмент, обеспечивающий получение $n$ равновозможных вариантов. Мы по определению считаем, что вероятность осуществления каждого из этих вариантов равна $1/n$, а вероятность каждого события $A$, состоящего из $k$ вариантов, равна $k/n$.

При $n = 6$, конечно, легко просто пересчитать все варианты, изобразив их на рисунке. Но когда число вариантов $n$ велико, на помощь приходят некоторые правила вычисления вероятностей.

Будем обозначать вероятность события $A$ через $p(A)$. События у нас – это просто некоторое подмножество множества $E$ всех возможных вариантов, причем $p(E) = 1$. Для бросаний кубика множество $E$ состоит из шести элементов 1, 2, …, 6. Самые простые соотношения между вероятностями возникают из соотношений между мно-

Опубликовано в «Кванте» №1 за 1991 год.

жествами, точнее, количествами элементов в них.

Вероятность события $\bar{A}$, *дополнительного* к $A$ (в него входят все элементы $E$, не входящие в $A$), равна

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A). \qquad (1)$$

Например, если $A$ состоит из чисел от 1 до 6, делящихся на 3, то $\bar{A}$ – числа, не делящиеся на 3; $p(A) = 1/3$, $p(\bar{A}) = 1 - 1/3 = 2/3$ (рис.1,*г*).

Объединение $A \cup B$ – событие, состоящее в том, что произошло *хотя бы одно* из двух событий: $A$ *или* $B$. Если события $A$ и $B$ *несовместны*, т.е. два множества $A$ и $B$ не пересекаются, то

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B). \qquad (2)$$

Если же события $A$ и $B$ *совместны*, т.е. имеется непустое пересечение $AB$, то

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(AB). \qquad (3)$$

(Пересечение двух множеств $A$ и $B$ – событие, состоящее в том, что выполняются одновременно $A$ и $B$, – мы обозначаем, как принято в теории вероятностей, просто $AB$.)

## Повторные испытания

Представим себе, что кубик бросили два раза (или – что сразу бросили два кубика); это – два независимых испытания.

**Задача 1.** *Какова вероятность, что при первом бросании выпадет не меньше 5 очков, а при втором – не меньше 4?*

Теперь множество $E$ – это множество всех пар $(x, y)$, где $x$ и $y$ – числа от 1 до 6 ($x$ означает число очков, выпавшее на первом кубике, $y$ – на втором). Все пары $(x, y)$ равновероятны, их число равно $6 \cdot 6 = 36$. Удобно изобразить их в виде квадрата $6 \times 6$ клеток: клеточка с координатами $x$ и $y$ изображает пару $(x, y)$ (рис.2). Из них надо выбрать те клетки, которые удовлетворяют условию задачи: $x \le 5$, $y \le 4$. Они заполняют прямоугольник $2 \times 3$ клетки. Итак, среди $6 \cdot 6$ пар выбрано $2 \cdot 3$, так что искомая вероятность равна

$$\frac{2 \cdot 3}{6 \cdot 6} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

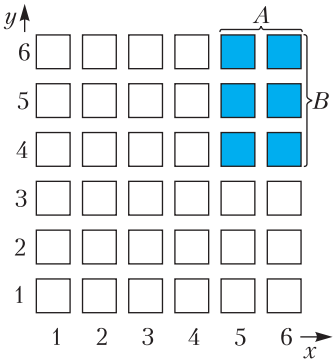



*Рис. 2*

Вообще, если событие $A$ определяется по результату первого испытания, а $B$ – по второму испытанию (т.е. $A$ – это некоторый набор столбцов, а $B$ – некоторый набор строк), то вероятность одновременного выполнения $A$ и $B$ равна

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B). \qquad (4)$$

В этом случае события $A$ к $B$ называют *независимыми*. Правило произведения (4) можно использовать и для большего числа независимых испытаний. Например, вероятность, что при каждом из трех бросаний кубика выпадет пятерка или шестерка, равна $(1/3)^3 = 1/27$.

Рассмотрим теперь два примера, где речь тоже идет о двух испытаниях, т.е. $E$ – множество пар $(x, y)$, но интересующее нас событие зависит от $x$ и $y$ более сложным образом, так что условие «независимости» уже не выполнено.

**Задача 2.** *Какова вероятность, что хотя бы при одном из двух бросаний кубика выпадет не менее 5 очков?*

Соответствующие пары отмечены на рисунке 3, так что искомая вероятность равна $20/36 = 5/9$.

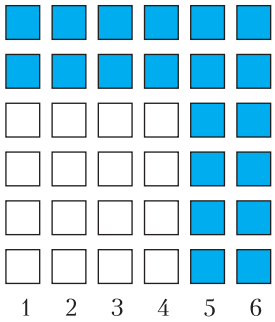



*Рис. 3*

Заметим, что можно рассуждать иначе: найти дополнительную вероятность того, что и при первом, и при втором бросании выпадет не более 4 очков. Это уже можно сделать по правилу произведения: $(2/3)\times(2/3) = 4/9$, поэтому искомая вероятность равна $1-\frac{4}{9}=\frac{5}{9}$.

**Задача 3.** *Какова вероятность, что количества очков, выпавших при двух бросаниях, отличаются не более чем на* 1?

Нужные пары отмечены на рисунке 4, это 6 клеточек по диагонали $x = y$ и по 5 на двух соседних с ней параллельных прямых. Искомая вероятность равна $16/36 = 4/9$.

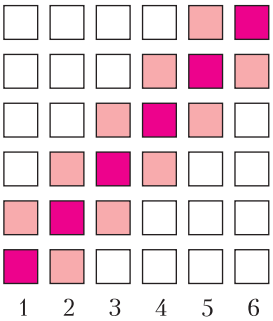


*Рис. 4*

## Случайные числа и точки: равномерное распределение

Теперь речь пойдет о случайных точках на отрезке, на окружности, в квадрате... Как определяются вероятности в этом случае? Какие «события» можно рассматривать?

Покатим по столу круглый карандаш – цилиндр. Пусть его поверхность желтая, но некоторая полоска или несколько полосок ширины $\alpha$ покрашены в красный цвет (рис.5); какова вероятность, что карандаш остановится на красной, а не на желтой линии? (Здесь $\alpha$ – угол, измеряемый, скажем, в градусах.)

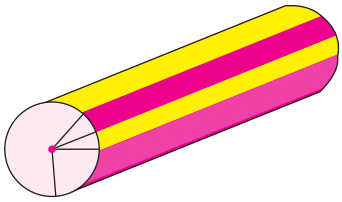


*Рис. 5*

Представим себе аналогичную задачу про карандаш с большим числом граней $n$, из которых $k$ закрашены в красный цвет. Тогда искомая вероятность будет равна отношению $k/n$. Для круглого карандаша множество «элементарных событий» $E$ – окружность, и вероятность каждого отдельного элемента – вероятность остановки на одной определенной линии – равна 0; но вероятность события «остановка на одной из красных линий» естественно считать равной отношению $\alpha/360°$.

Точно так же, говоря о случайной точке на отрезке (или на окружности) длины $L$, будем считать, что вероятность ее попадания в любой отрезок (или на дугу) длины $d$ равна $d/L$. В соответствии с правилом (1), мы считаем также, что вероятность попадания в один из данных (непересекающихся) отрезков суммарной длины $d$ равна $d/L$. Например, вероятность, что первая после запятой цифра случайного числа на отрезке $[0;1]$ – простое число, т. е. одна из цифр 2, 3, 5 и 7 (рис.6), равна $4/10 = 2/5$.

*Рис. 6*

Точно так же, говоря о случайной точке в квадрате или другой фигуре площади $S$, мы будем считать, что вероятность ее попадания в каждую область площади $s$ равна $s/S$. Заметим, что и для длины на отрезке и для площади фигуры выполнены правила (1), (2) и (3).

Замечательно, что, выбирая независимо друг от друга два числа $x$ и $y$ на отрезке $[0;1]$, можно считать, что $(x, y)$ – это координаты случайной точки в единичном квадрате: по аналогии с формулой произведения (4), вероятность попадания точки $(x, y)$ в прямоугольник со сторонами $a$ и $b$, параллельными осями $Ox$ и $Oy$, равна произведению $ab$, т. е. площади этого прямоугольника.

Например, вероятность того, что случайное число, выбранное на отрезке $[0;1]$, находится на расстоянии не более 0,1 от

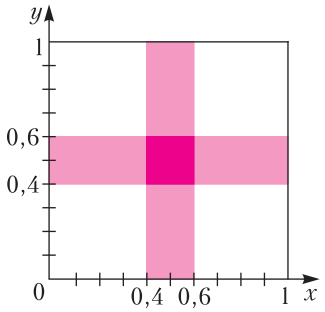



*Рис. 7*

середины отрезка, равна 0,2 (такие точки покрывают отрезок от 0,4 до 0,6). Если $x$ и $y$ – два случайных числа на отрезке $[0; 1]$, вероятность того, что *оба* они удалены от середины не более чем на 0,1, равна $0{,}2^2 = 0{,}04$, а вероятность того, что *хотя бы одно* из них удалено от середины не более чем на 0,1, равна 0,36 (рис.7); эту вероятность можно найти, сложив площади прямоугольников, составляющих «крест», а можно – перейдя к «дополнительным событиям» – по формуле $\left(1 - 0{,}8^2\right)$.

Теперь мы можем решить и задачу о встрече, сформулированную в начале статьи. Уточним ее следующим образом. Будем считать, что каждый из приятелей приходит в некоторый случайный момент, выбранный на отрезке $[0; 45]$ (в течение первых 45 минут условленного часа), и ждет другого 15 минут; тем самым они встретятся, если разность между моментами $x$ и $y$ их прихода (по модулю) не превосходит 15.

Изобразим на квадрате $0 \le x \le 45$, $0 \le y \le 45$ множество точек $(x, y)$, в которых $|x - y| \le 15$ – оно ограничено прямыми $y - x = 15$ и $y - x = -15$, параллельными диагонали $x = y$ (рис.8). Площадь этого

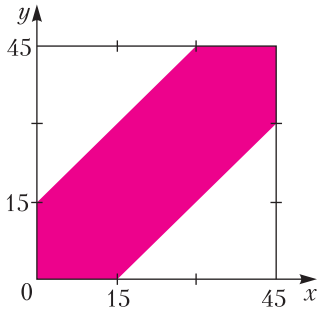



*Рис. 8*

множества равна $45^2 - 30^2$ (два белых треугольника вместе составляют квадрат со стороной 30), а искомая вероятность равна ее отношению к площади всего квадрата $45 \times 45$:

$$1 - \frac{30^2}{45^2} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9}.$$

Решим еще одну задачу про случайную точку $(x, y)$.

**Задача 4.** *Найдите вероятность $p = p(a)$ того, что сумма $x + y$, где $x$, $y$ – случайные числа на отрезке $[0; 1]$, больше данного числа $a$.*

Уравнение $x + y = a$ задает прямую, параллельную диагонали $x + y = 1$ квадрата. Искомая вероятность – площадь части квадрата, лежащей выше этой прямой. (При $a > 1$ это треугольник, при $a < 1$ – пятиугольник, и легче считать площадь дополнения.) Ответ записывается так:

$$p = \begin{cases} (2-a)^2/2 & \text{при } a \ge 1, \\ 1 - a^2/2 & \text{при } a \le 1. \end{cases}$$

## Соображения симметрии. Точки на окружности

Заметим, что при $a = 1$ в предыдущей задаче получается ответ $p = 1/2$. (Соответствующие точки $(x, y)$ лежат над диагональю.) Его можно угадать сразу, не рисуя картинку на квадрате: если $x$, $y$ – числа, случайно выбираемые на отрезке $[0; 1]$, то условие $x + y \le 1$ можно записать в виде $x \le 1 - y$ и прочесть так: «$x$ ближе к 0, чем $y$ к 1». Ясно, что дополнительное условие получается просто заменой $x$ на $y$ и имеет ту же вероятность: ведь роли $x$ и $y$, а также концов отрезка совершенно равноправны.

Вот еще один пример.

**Задача 5.** *На отрезке $[0; 1]$ случайно выбираются три числа. Какова вероятность того, что а) выбранное последним число наибольшее; б) числа идут в порядке возрастания?*

Здесь речь идет уже не о двух, а о трех числах $x$, $y$, $z$. Тройки $(x, y, z)$ можно было бы рассматривать как координаты точки в

кубе и подсчитывать объемы нужных множеств. Но в этом нет нужды. Ведь ясно, что все 6 вариантов расположения трех чисел: $x<y<z$, $y<x<z$, $x<z<y$, $y<z<x$, $z<x<y$, $z<y<x$ совершенно равноправны и имеют одинаковую вероятность по 1/6. (При этом совпадение хотя бы двух из трех чисел имеет нулевую вероятность. – *Прим. ред.*) Таким образом, ответ на вопрос б) 1/6, а на вопрос а) 1/3 (ему отвечают два первых варианта).

Решим теперь задачу об остроугольном треугольнике, сформулированную в начале статьи. Ясно, что при любом повороте окружности вероятности событий и условие «остроугольности» сохраняются; так что мы можем считать, что одна из трех выбираемых вершин $A$, $B$, $C$ – скажем $C$ – фиксирована, а две другие уже выбираются случайно. Будем задавать их положения величинами дуг $CA=\alpha$, $CB=\beta$, отсчитываемых против часовой стрелки. Будем измерять дуги в радианах, тогда пара $(\alpha,\beta)$ – это точка в квадрате $0<\alpha<2\pi$, $0<\beta<2\pi$. По теореме о том, что величина вписанного угла измеряется половиной дуги между его сторонами, углы треугольника $ABC$ равны $\pi-\beta/2$, $\alpha/2$ и $(\beta-\alpha)/2$ (мы считаем, что $\beta>\alpha$, как на рисунке 9; случай $\alpha>\beta$ совершенно аналогичен – $\alpha$ и $\beta$ меняются ролями). Точки $(\alpha,\beta)$ в треугольнике $\alpha<\beta<2\pi$, для которых все три угла $A$, $B$, $C$ меньше $\pi/2$, т.е. $\beta>\pi$, $\alpha<\pi$ и $\beta-\alpha<\pi$, заполняют внутренность меньшего треугольника, образуемого средними линиями большего (рис.10). Ситуация в нижнем треугольнике $\beta<\alpha<2\pi$ симметрична относительно диагонали $\alpha=\beta$ квадрата. Поэтому искомая вероятность равна 1/4.

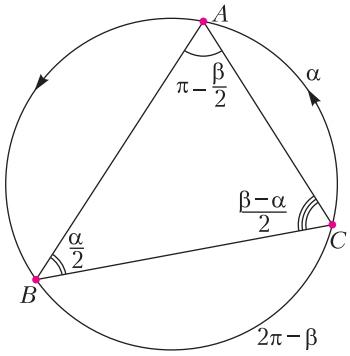


Рис. 9

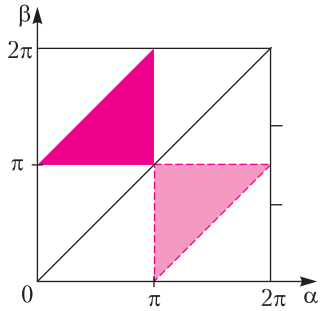


Рис. 10

У этой задачи есть и другое удивительно красивое решение, которое позволяет решить аналогичную задачу для $n$ точек (см. упражнение 9 в конце статьи); мы узнали его от физика В.В.Фока и математика Ю.В.Чеканова.

Будем искать дополнительную вероятность того, что три точки $A$, $B$, $C$ являются вершинами *тупоугольного* треугольника.

Рассмотрим для каждой точки $M$ окружности диаметрально противоположную ей точку $M'$ и полукруг, для которого $M'$ служит серединой дуги. Тройка $A$, $B$, $C$ «тупоугольная», если и только если полукруги, соответствующие точкам $A$, $B$ и $C$, пересекаются по некоторому сектору (рис.11). (Для каждого радиуса $OD$ в выделенном секторе все углы $DOA$, $DOB$, $DOC$ – тупые; такой радиус $OD$ существует, если $A$, $B$, $C$ лежат на одной полуокружности или, что эквивалентно, образуют «тупоугольную» тройку.)

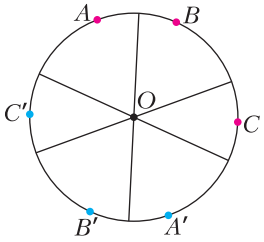


Рис. 11

Выбор случайных точек проведем в два этапа. Сначала отметим произвольно три пары диаметрально противоположных точек и проведем для каждой пары диаметр, относительно которого она симметрична.

А затем в каждой паре независимо выберем (с вероятностью 1/2) одну из точек. Докажем, что из 8 вариантов выбора точек ровно в 6 получится «тупоугольная» тройка $A$, $B$, $C$. В самом деле, три диаметра делят круг на 6 секторов, причем каждый сектор можно получить как пересечение трех определенных полукругов, соответствующих некоторому выбору точек $A$, $B$, $C$. Итак, вероятность получить «тупоугольную» тройку равна $6/8 = 3/4$, а значит, дополнительная вероятность равна 1/4.

### Задача Бюффона

Мы привыкли, что вероятность – это всегда дробь с небольшими целыми числителем и знаменателем. Но в заключение приведем две задачи, где в ответе встречается число $\pi$. Первая почти очевидна.

**Задача 6.** *На большой лист клетчатой бумаги со стороной клетки* 1 *случайно бросают точку. Какова вероятность, что она будет находиться на расстоянии меньше* 1/2 *от центра некоторой клетки?*

Достаточно рассмотреть одну клетку. Точки, находящиеся на расстоянии не более 1/2 от ее центра, заполняют круг площади $\pi/4$. Это и есть ответ: искомая вероятность (отношение площади круга к площади клетки) равна $\pi/4$.

**Задача 7** (задача Бюффона об игле). *Плоскость разлинована на полосы шириной* 1. *На нее бросают иглу (отрезок) длиной* 1. *Какова вероятность, что игла пересечет одну из линий?*

У этой задачи удивительный ответ: $2/\pi$. Откуда же берется $\pi$, если в условии нет речи ни об окружностях, ни о расстояниях?

Наметим коротко одно из решений. Положение иглы (если не говорить о смещении ее вдоль линий, очевидно, не играющем роли) определяется двумя параметрами: расстоянием $y$ конца иглы от верхнего края полосы, в которую он попал, $0 < y < 1$, и углом $\alpha$ иглы с прямой, перпендикулярной линиям (рис.12,*а*). Можно считать, по соображениям симметрии, что $\alpha < \pi/2$. Условие, при котором игла пересекает

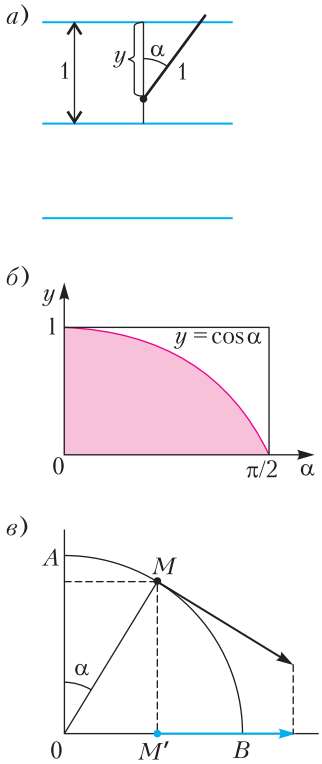



Рис. 12

край полосы: $y < \cos\alpha$. Итак, среди точек $(\alpha, y)$ в прямоугольнике $0 < \alpha < \pi/2$, $0 < y < 1$ мы должны выбрать лежащие ниже линии $y = \cos\alpha$ (рис.12,*б*) и найти отношение площади $S$ полученной фигуры к площади прямоугольника (равной $\pi/2$). Для тех, кто знаком с понятием интеграла, эта задача нетрудная: $\int_0^{\pi/2} \cos\alpha\, d\alpha = 1$. Но можно получить ответ, опираясь на аналогию из механики. Представим себе точку, равномерно с единичной скоростью проходящую дугу $AB$ в 1/4 круга радиуса 1 (рис.12,*в*). Когда точка $M$ находится в положении $\alpha$ на дуге $(0 < \alpha < \pi/2)$, скорость ее проекции $M'$ на радиус $OB$ равна как раз $\cos\alpha$. Так что рисунок 12,*б* – это график скорости точки $M'$, а площадь $S$ под графиком равна пройденному этой проекцией пути, т.е. $S = OB = 1$.

В заключение предлагаем несколько задач, похожих на те, с которыми мы познакомились.

### Упражнения

**1.** Какова вероятность того, что при двух бросаниях кубика выпадут

а) два числа с суммой не меньше 10;

б) два числа, из которых первое делится на второе?

**2.** Пассажир приходит на остановку в случайный момент времени и дожидается автобуса одного из двух маршрутов, идущих с интервалами 10 и 15 минут. Найдите вероятность $p = p(t)$ того, что ему придется ждать не менее $t$ минут.

**3.** Отрезок разделен на три равные части. Какова вероятность, что три точки, случайно брошенные на отрезок, попадут в три разных кусочка?

**4.** На окружности случайно выбраны четыре точки $A$, $B$, $C$, $D$. Какова вероятность того, что отрезки $AC$ и $BD$ пересекаются?

**5.** а) В окружности проведен диаметр. На нем случайно выбирается точка и через нее проводится хорда, перпендикулярная диаметру. Какова вероятность, что длина хорды больше радиуса окружности?

б) На окружности случайно выбираются две точки. Какова вероятность, что длина соединяющей их хорды больше радиуса?

в) В круге случайно выбрана точка. Какова вероятность, что хорды с серединой в этой точке больше радиуса?

г) Решите аналогичные задачи про хорду длины $r\sqrt{3}$, где $r$ – радиус.

*Замечание*. Задачи а), б), в) как бы три варианта одной и той же: проведем случайную прямую, пересекающую данную окружность; какова вероятность, что длина высекаемой хорды больше радиуса? Но ответ в них разный (парадокс Бертрана)!

**6.** На окружности случайно выбраны три точки. Какова вероятность, что у треугольника с вершинами в этих точках а) есть угол больше 30°; б) все углы больше 30°; в) все углы меньше 120°?

**7.** На отрезке случайно выбраны две точки. Какова вероятность, что из отрезков, на которые он разбит, можно составить треугольник?

**8.** Плоскость разбита сеткой прямых на а) квадраты; б) правильные треугольники со стороной 1. Какова вероятность, что монета диаметра 1, случайно брошенная на плоскость, закроет одну из вершин сетки?

**9.** а) Найдите вероятность того, что выпуклый $n$-угольник с вершинами в случайных точках окружности содержит ее центр?

б) Докажите, что вероятность того, что $n$ случайно выбранных точек на сфере лежат на одной полусфере (по одну сторону от некоторого большого круга), равна $\left(n^2 - n + 2\right)/2^n$.

***Вниманию наших читателей***

*Начиная с 2017 года журнал «Квант» стал ежемесячным и в год выходит 12 номеров журнала.*

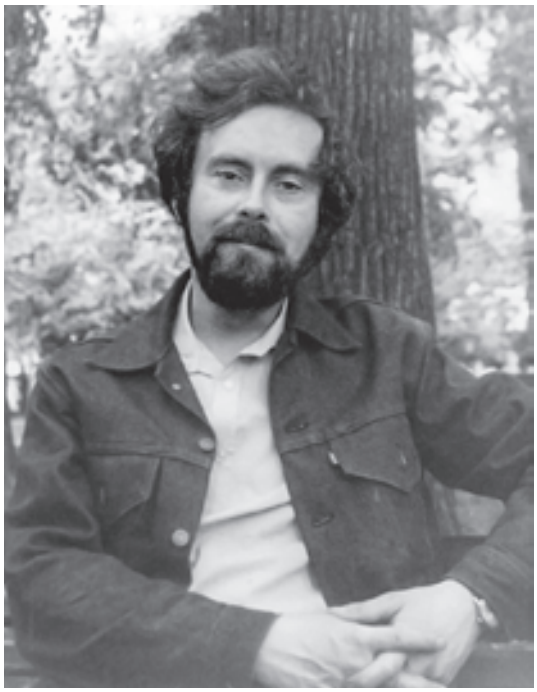
*Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.*

*Купить журнал «Квант» возможно в магазине «Математическая книга» издательства МЦНМО (адрес интернет-магазина: biblio.mccme.ru), а также в московских книжных магазинах «Библио-глобус», «Молодая гвардия», «Московский дом книги» и в редакции журнала.*

*Архив вышедших номеров журнала «Квант» имеется на сайте http://kvant.ras.ru*

# К 80-летию Николая Борисовича Васильева

В этом году исполнилось бы 80 лет Николаю Борисовичу Васильеву, без которого невозможно представить математическое образование, просвещение, олимпиадное движение нашей страны, автору множества математических задач и статей – и просто очень хорошему и светлому человеку, которого многие любили и всегда вспоминают с теплом, нежностью и признательностью.



*Н.Б.Васильев, 1982 год (фото Л.Бодневой)*

Н.Б. Васильев родился в Москве 8 августа 1940 года и всю жизнь прожил в одном из красивейших уголков столицы – на Софийской набережной, прямо напротив Кремля. Родители его, Борис Федорович Васильев и Нина Николаевна Лессиг, были инженерами-строителями. Детство Николая Борисовича прошло среди книг, в кругу широко образованных людей, любящих и глубоко знающих искусство, особенно музыку. Вся обстановка семьи и семейное окружение привили ему безупречный вкус и тонкое понимание красоты. Он ценил красоту и в искусстве, и в математике, которой увлекся в старших классах школы.

В 1957 году Николай Борисович окончил школу – с серебряной медалью – и одновременно музыкальное училище при Московской консерватории. Нужно было выбирать: музыка или математика. Он выбрал математику, но музыка всегда оставалась с ним.

Математическая жизнь Н.Б.Васильева состояла из двух потоков – научного и просвещенческого. По окончании университета и аспирантуры он поступил на работу в межфакультетскую лабораторию математических методов в биологии МГУ, где и трудился всю жизнь. Им написано более двадцати научных статей по различным разделам современной математики. Но, постоянно занимаясь наукой, не меньшую, а возможно, и куда большую часть своего времени и сил он отдавал математическому просвещению. Еще первокурсником механико-математического факультета МГУ он вел кружки для школьников, работал в оргкомитете Московской математической олимпиады – и занимался этим многие годы. Придумывал задачи, участвовал в составлении вариантов и проверке работ, в обсуждении результатов и присуждении премий. С 1963 года, с возникновения Всесоюзной заочной математической школы, принимал участие в разработке ее программ, вместе с другими известными математиками написал несколько популярных книжек по математике, предназначенных для учеников ВЗМШ. Некоторые из них выдержали по нескольку изданий и были переведены на иностранные языки. Немалую роль Н.Б.Васильев сыграл и в развитии летних математических школ, и в организа-

ции Турнира городов – сочинял задачи, читал лекции, был членом жюри различных олимпиад и конференций. Беседовал с докладчиками, объяснял им возможности развития тем их докладов, был всегда внимательным, доброжелательным и заинтересованным.

Когда в конце 60-х годов возникла идея создания научно-популярного физико-математического журнала для школьников, Николай Борисович активно подключился к этой работе. Он был бессменным членом редколлегии и постоянным автором «Кванта». По его инициативе в журнале возник один из главных и, пожалуй, самых знаменитых разделов – «Задачник «Кванта», которым Николай Борисович неизменно руководил с момента основания журнала и до конца своих дней (его не стало 28 мая 1998 года).

Задачи были главной страстью Н.Б.Васильева. Как и в музыке и вообще в искусстве, в задачах он особенно ценил подлинную красоту и оригинальность идеи. Он был выдающимся композитором математических задач. Его задачи – а их многие десятки – выделяются отточенностью формулировок и решений, глубиной и связями с «большой» математикой. Кроме того, он как никто умел увидеть и выявить изюминку в присланной другим автором задаче, найти наиболее привлекательную формулировку, обнаружить возможные обобщения и дальнейшее развитие сюжета задачи, ясно и красиво изложить решение, зачастую сопроводить его комментариями и отсылками к литературе – для тех, кто захочет глубже разобраться в проблеме. Все это сделало «Задачник «Кванта» тем, что он есть: огромным корпусом глубоких и содержательных задач, под влиянием которых выросли целые поколения ученых.

Николай Борисович также автор более тридцати статей, без сомнения входящих, в число лучших публикаций «Кванта». Многие статьи написаны в соавторстве с другими математиками. Умение увидеть и выделить главное сочеталось в нем с недюжинными литературными способностями; Васильев обладал редкостным даром прозрачно и четно излагать самые сложные математические сюжеты. Зная это его умение, многие математики приносили в редакцию свои статьи и просили Николая Борисовича помочь довести их «до ума». Он никогда в этом не отказывал, а в некоторых случаях статья настолько улучшалась, что авторы просили его стать их соавтором.

На протяжении без малого сорока лет журнал «Квант» и Николай Борисович Васильев были неразрывно связаны. Трудно найти номер журнала, в котором не

Не будет преувеличением сказать, что каждый молодой человек, кто в течение последних тридцати лет начал в той или иной форме свой путь в математику, одним из первых слышал или читал имя Николая Борисовича Васильева. Оно было известно всем – и тем, кто участвовал в различных математических олимпиадах, и тем, кто интересовался «внеклассными» математическими статьями и книжками, и тем, кто увлекался причудливой игрой ума в решении математических задач.

Этого человека просто боготворили юные, делавшие лишь первые шаги в математике, они гордились возможностью вместе с ним устраивать математические соревнования, придумывать задачи, обсуждать темы и содержание статей. Его горячо любили и высоко ценили ровесники – за преданность науке и бескорыстное служение образованию молодежи, за честность человеческих отношений и чудесный характер, за то, что с ним было надежно работать. Он пользовался бесспорным авторитетом у более старших корифеев математики, многих из них уже нет с нами, – за исключительную компетентность и многогранную образованность, за талант ученого и преподавателя, популяризатора и организатора, за то, что во главу угла всегда ставил только интересы дела. И практически все называли его тепло и по-семейному – просто Коля.

*Н.Х.Розов*, 1998 год

Вот одно из моих светлых воспоминаний о Коле. Как-то в разговоре с ним я посетовал, что геометрические задачи на экстремум не используют для обучения анализу. Коля покачал головой, но ничего не сказал. Через пару дней я увидел Колю, спешащего ко мне, озаренного счастливой улыбкой. Оказалось, он придумал нестандартную задачу на экстремум, которая имеет красивые геометрическое и аналитическое решения. Вот эта задача: *В рюмку конической формы опущен шарик от пинг-понга. Размеры конуса и шарика заданы. Требуется найти высоту самой высокой точки шарика.* Удивительно изящная задача!

*В.М.Тихомиров*, 2020 год

было бы его материалов, – «Квант» воистину был огромной частью жизни Николая Борисовича.

### Избранные задачи Н.Б.Васильева

Приводим подборку задач, опубликованную в статье А.А.Егорова «Николай Борисович Васильев» в журнале «Математическое просвещение» в 1999 году.

**1** («Автобусная задача»). В автобусе без кондуктора ехали $k$ человек. Известно, что ни у кого из васажиров не было монет крупнее 20 коп. Известно также, что каждый пассажир уплатил за проезд и получил сдачу. Докажите, что наименьшее число монет, которое могло для этого потребоваться, равно $k+\left[\frac{k+3}{4}\right]$. (В 1961 году в обращении были медные монеты достоинством в 1, 2, 3 и 5 коп., а также «серебряные» – белые монеты в 10, 15 и 20 коп. В автобусе без кондуктора полагалось бросить в кассу 5 коп. в любом наборе и оторвать билет. Можно было также бросить, например, 20 коп. и оторвать 4 билета.)

*(XXIII Московская математическая олимпиада)*

**2** («Коробочка Васильева»). Как надо расположить в пространстве прямоугольный параллелепипед, чтобы площадь его проекции на горизонтальную плоскость была наибольшей?

*(XXV Московская математическая олимпиада)*

**3** («Гуляющие джентльмены»). По аллее длиной 100 м идут три джентльмена со скоростями 1, 2 и 3 км/ч соответственно. Дойдя до конца аллеи, каждый из них поворачивает и идет назад с той же скоростью. Докажите, что найдется отрезок времени в 1 мин, когда все трое будут идти в одном направлении.

*Н.Б.Васильев (слева) и А.А.Егоров, 1959 год (фото Е.Ермаковой)*

**4** («Квадраты в прямоугольнике»). В прямоугольник со сторонами 20 и 25 бросают 120 квадратов со сторой 1. Докажите, что в прямоугольник можно поместить круг диаметра 1, не пересекающийся ни с одним из квадратов

*(Первая Всероссийская олимпиада, 1961 год, Москва)*

**5** («Жук»). На плоскости нарисована сеть, образованная из правильных

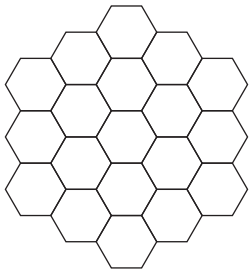


Рис. 1

шестиугольников со стороной 1 (рис.1). Жук, двигаясь по линиям сети, прополз из некоторого узла $A$ в некоторый узел $B$ по кратчайшему пути, равному 100. Докажите, что половину всего пути он полз а одном направлении

*(Четвертая Всероссийская олимпиада, 1964 год, Москва)*

**6** («Игра Васильева»). Написано 20 чисел: 1, 2, …, 20. Двое играющих по очереди ставят перед этими числами знаки «+» или «–» (знак можно ставить перед любым свободным числом). Первый стремится к тому, чтобы после расстановки всех 20 знаков сумма всех чисел была как можно меньше по модулю. Какую наибольшую по модулю сумму может обеспечить себе второй игрок?

*(Шестая Всероссийская олимпиада, 1966 год, Воронеж)*

**7** («Фигуристы»). После выступлений 20 фигуристов каждый из 9 судей по своему усмотрению распределяет среди них места с 1-го по 20-е. Оказалось, что у кадого фигуриста места, присвоенные ему разными судьями, отличаются не более чем на 3. Подсчитаем суммы мест, полученных каждым фигуристом, и расположим эти числа в порядке возрастания: $c_1 \le c_2 \le c_3 \le \ldots \le c_{20}$. Какое наибольшее значение может иметь $c_1$?

*(Вторая Всесоюзная олимпиада, 1968 год, Ленинград)*

**8** («Разноцветный многоугольник»). Вершины правильного $n$-угольника покрашены несколькими красками (каждая одной краской) так, что точки одного и того же цвета служат вершинами правильного многоугольника. Докажите, что среди этих многоугольников найдутся два равных.

*(Четвертая Всесоюзная олимпиада, 1970 год, Симферополь)*

**9** («Нервные сети»). В бесконечной цепочке нервных клеток каждыя клетка может находиться в одном из двух состояний: «покой» и «возбуждение». Если в данный момент клетка возбудилась, то она посылает сигнал, который через единицу времени (скажем, через одну миллисекунду) доходит до обеих соседних с ней клеток. Каждая клетка возбуждается в том и только в том случае, если к ней приходит сигнал от одной из соседних клеток; если сигналы приходят одновременно с двух сторон, то они погашаются, и клетка не возбуждается. Например, если в начальный момент времени $t = 0$ возбудить три соседние клетки, а остальные оставить в покое, то возбуждение будет распространяться, как показано на рисунке 2. (Возбужденные клетки – черные.)

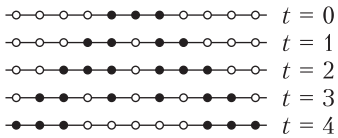



Рис. 2

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ возбуждена только одна клетка. Сколько клеток будет находиться в возбужденном состоянии через 15 мсек? через 65 мсек? через 1000 мсек? через $t$ мсек?

Что будет в том случае, если цепочка не бесконечная, а содержит всего $N$ клеток, соединенных в окружность (рис.3), – будет ли возбуждение поддерживаться бесконечно долго или затухнет?

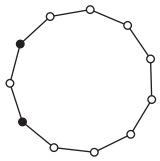


Рис. 3

*(«Задачник «Кванта», задача М19)*

**10** («Параллелепипеды»). В пространстве заданы 4 точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, для которых все эти точки служат вершинами?

*(Седьмая Всесоюзная олимпиада, 1973 год, Кишинев)*