

Экзамен. Продвинутый вариант

Задача 1. Верно ли, что произведение любых двух связных топологических пространств связно?

Задача 2. Какие из следующих пространств гомеоморфны друг другу?

- i) \mathbb{R}^2 ; ii) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = -1\} / \sim$, где $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$;
iii) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$; iv) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$; v) $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$.

Задача 3. Векторное поле на плоскости $v(x, y) = (v_1(x, y), v_2(x, y))$ имеет единственную особую точку $(0, 0)$. Известно, что для любой точки (x, y) на единичной окружности $v_1(x, y) \neq v_2(x, y)$. Чему равен индекс особой точки $(0, 0)$?

Задача 4. Пусть X — топологическое пространство, состоящее из по меньшей мере 3 точек. Известно, что для любой точки $a \in X$ пространство $X \setminus \{a\}$ — хаусдорфово. Обязательно ли исходное пространство тоже хаусдорфово?

Задача 5. Пусть S — сфера с g ручками и $d \geq 1$ дырками. Взяли две непересекающиеся дуги AB и CD границы S и прямоугольник $A'B'C'D'$. Склеили дугу AB со стороной $A'B'$ и дугу CD со стороной $C'D'$ — так, что получилась сфера с g' ручками и d' дырками. Какие пары (g', d') могли получиться?

Задача 6. Существует ли такое непрерывное отображение f сферы S^2 на её экватор $\Gamma \subset S^2$, что ограничение f на Γ тождественно?

Задача 7. Пусть X — метрическое пространство. Рассмотрим на нём пространство $C_b(X)$ непрерывных ограниченных функций (с \sup -метрикой). Пусть выполнен аналог заключения теоремы Стоуна–Вейерштрасса: *если подалгебра $A \subset C_b(X)$ разделяет точки, то она всюду плотна в $C_b(X)$* . Следует ли из этого, что X — компакт?

Напоминание. Для метрического пространства топологическая и секвенциальная компактности равносильны (этим можно пользоваться без доказательства).

На работу отводится **3 часа** (180 минут).

Разрешается использовать любые свои *бумажные* материалы. Можно использовать без доказательства утверждения из лекций (явно их сформулировав).

Успехов!