Экзамен. Базовый вариант

Задача 1. Является ли пространство $\{x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$
а) компактным? б) связным?

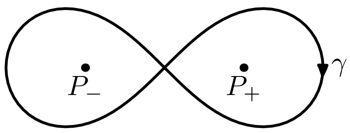
Задача 2. а) Верно ли, что каждое открытое подмножество прямой является объединением счетного числа замкнутых множеств?
б) Верно ли, что каждое замкнутое подмножество прямой является объединением счетного числа открытых множеств?

Задача 3. Пусть (X, d) — метрическое пространство. Равносильны ли следующие два условия?
1) Существует подмножество $Y \subset \mathbb{R}$ с обычной метрикой и изометрия $f : X \to Y$.
2) Для любых трёх точек $a, b, c \in X$ из трёх расстояний $d(a, b)$, $d(b, c)$, $d(a, c)$ наибольшее равно сумме двух наименьших.

Задача 4. У векторного поля v на плоскости ровно две особые точки: $P_+ = (1, 0)$ индекса 1 и $P_- = (-1, 0)$ индекса (-1). Кривая $\gamma : S^1 \to \mathbb{R}^2$ задана параметрически как

$$\gamma(t) = (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t)), \quad \varphi(t) = \frac{\pi}{4}\cos t, \quad r(t) = 2\sin t,$$

где параметр t пробегает от 0 до 2π (см. рис.). Найдите индекс $\operatorname{ind}_\gamma v$.



Задача 5. Симметрическим квадратом $S^2(X)$ пространства X называется фактор $X \times X$ по отношению $(x, y) \sim (y, x)$. Гомеоморфен ли симметрический квадрат прямой $S^2(\mathbb{R})$ какому-нибудь подмножеству плоскости?

Задача 6. Про замкнутые поверхности A, B, C, D известно, что
- связная сумма $A\#B$ гомеоморфна связной сумме проективной плоскости и сферы с 5 ручками;
- связная сумма $B\#C$ гомеоморфна сфере с 6 ручками;
- связная сумма $C\#D$ гомеоморфна связной сумме бутылки Клейна и сферы с 7 ручкам.

Чему гомеоморфна связная сумма $A\#D$?

На работу отводится **3 часа** (180 минут).
Разрешается использовать любые свои *бумажные* материалы. Можно использовать без доказательства утверждения из лекций (явно их сформулировав).
Успехов!