

## Введение в топологию (Матфак ВШЭ, 2020/21). Программа мидтерма 16.01.2021

1. Открытые и замкнутые подмножества прямой, их свойства. Классификация открытых подмножеств прямой.
- 2\*. Теорема Бэра.  $F_\sigma$  и  $G_\delta$ -множества. Рациональные числа не принадлежат классу  $G_\delta$ .
- 3\*. Множества первой категории по Бэру. Множество точек разрыва поточечного предела последовательности непрерывных функций есть множество первой категории. Следствие о множестве точек разрыва производной.
4. Метрические пространства. Открытые и замкнутые подмножества метрического пространства, их свойства. Примеры метрик на плоскости. Подпространства, индуцированная метрика.
5. Два определения замыкания, их эквивалентность.
6. Непрерывные отображения метрических пространств (два определения, их эквивалентность). Непрерывность композиции непрерывных отображений.
7. Гомеоморфизм метрических пространств. Гомеоморфизм прямой и интервала, открытого диска и плоскости.
8. Линейная связность. Компоненты линейной связности. Сохранение линейной связности при непрерывных отображениях. Негомеоморфность отрезка, прямой, квадрата.
9. Определения (топологической) связности, их эквивалентность. Сохранение связности при непрерывных отображениях. Линейно связное пространство связно.
- 10\*. Пример связного, но не линейно связного пространства. Для открытых подмножеств  $\mathbb{R}^n$  связность и линейная связность эквивалентны.
11. Теорема Брауэра, вывод теоремы Брауэра из теоремы о несуществовании ретракта шара на границу.
- 12\*. Вывод теоремы Брауэра из леммы Шпернера, доказательство леммы Шпернера (в размерности 2).
13. Фундаментальные последовательности. Полные метрические пространства.
- 14\*. Пополнение метрического пространства. Продолжение равномерно непрерывной функции на пополнение.
15. Принцип вложенных шаров. Принцип сжимающих отображений.
- 16\*. Полнота пространства непрерывных функций на отрезке с  $\sup$ -метрикой.
17. Секвенциальная компактность. Непрерывная функция на секвенциально компактном пространстве ограничена и достигает максимума.
18. Компактность. Непрерывная функция на компакте ограничена и достигает максимума. Равномерная непрерывность непрерывных функций на компакте.
19. Свойства компактов: замкнутые подмножества компакта компактны, непрерывный образ компакта компактен, образ компакта при любом вложении замкнут.
20. Произведение (конечного числа) метрических пространств. Произведение конечного числа компактов компактно.
21. Компактность отрезка. Критерий компактности подмножества  $\mathbb{R}^n$ .
- 22\*. Полнота компактного метрического пространства. Критерий компактности в терминах  $\varepsilon$ -сетей.
23. Нормы на векторных пространствах. Построение метрики по норме. Совпадение открытых подмножеств для эквивалентных норм. Эквивалентность норм на  $\mathbb{R}^n$ .
24. Топологические пространства. Построение топологии по метрике. Непрерывные отображения топологических пространств.
25. База топологии.

Сдающие мидтерм на базовом уровне получают только вопросы без звездочек. Вместо случайного билета можно выбрать билет, один из вопросов которого точно будет про размерность (по лекции 7). Кроме теории потребуется решать задачи.