Универсальный граф и универсальное метрическое пространство Урысона

Виктор Клепцын

CNRS, Institute of Mathematical Research of Rennes, University of Rennes 1

14 ноября 2020,
Париж/Москва

Универсальный граф

Определение

Универсальный граф (граф Радо, граф Эрдеша–Реньи) — такой граф G со счётным числом вершин, что

1. Любой конечный граф изоморфен какому-то его подграфу
2. Любые два изоморфных конечных подграфа G можно совместить: любой изоморфизм между конечными подграфами G продолжается до глобального автоморфизма G.

Теорема (Радо; Эрдеш–Реньи)

Универсальный граф существует и единственен с точностью до изоморфизма.

Единственность

Начнём с доказательства единственности:

Предложение

Любые два универсальных графа G и G' изоморфны.

Доказательство.

- Не знаешь, как доказывать — доказывай по индукции!
- Пронумеруем вершины этих графов: пусть это $V = \{v_1, v_2, \dots\}$ и $V' = \{v'_1, v'_2, \dots\}$.
- Будем строить последовательность вложений в G' подграфа на первых n вершинах: изоморфизмы

$$f_n : \{v_1, \dots, v_n\} \to \{v'_{i_1}, \dots, v'_{i_n}\}.$$

$\square$

Продолжение доказательства

Продолжение доказательства.

Пусть G_n — подграф G на первых n вершинах, $\{v_1, \dots, v_n\}$.

- Пусть f_n уже построено, будем строить f_{n+1}.
- Воспользуемся первым свойством универсальности: существует изоморфизм G_{n+1} с некоторым подграфом G'. Обозначим его через h_{n+1}.
- Но этот изоморфизм не обязательно продолжает f_n!

□

Продолжение доказательства

Продолжение доказательства.

- Воспользуемся теперь вторым свойством универсальности: у нас есть два вложения G_n, и их можно совместить. То есть — существует глобальный автоморфизм g графа G', такой, что $f_n = g \circ h_{n+1}|_{G_n}$.
- Положим $f_{n+1} := g \circ h_{n+1}$. Тогда f_{n+1} это вложение G_{n+1}, продолжающее f_n:

$$f_{n+1}|_{G_n} = g \circ h_{n+1}|_{G_n} = f_n.$$

- Мы построили семейство вложений $f_n : G_n \to G'$, продолжающих друг друга.
- Объединим их всех — и вот мы и получим искомый изоморфизм $f : G \to G'$. Победа!
- Правда? Нет. В таком виде рассуждение неверно.

□

Продолжение доказательства

А в чём проблема? Чего мы не договорили?

Продолжение доказательства.

- Искомое отображение f должно быть изоморфизмом между G и G' — то есть биекцией на между их вершинами.
- То, что построенное нами отображение инъективно, правда. Если бы оно склеивало какие-то вершины v_j и v_k, то их же склеивало бы и $f_{\max(j,k)}$, а это не так.
- Но кто сказал, что оно получится сюръективным, что его образом будет весь граф G'? Никто. Более того, можно найти такую последовательность f_n, что образ итогового отображения f будет не всем G' (да, универсальный граф изоморфен некоторому своему собственному подграфу!).
- Нужно чинить конструкцию.

$\square$

Окончание доказательства

Окончание доказательства.

- Искомое отображение f должно быть изоморфизмом между G и G' — то есть биекцией на между их вершинами.
- Раньше мы добавляли одну за одной вершины в область определения f, и всё. Теперь на нечётных шагах будем их добавлять в область определения, а на чётных — в множество значений.

Лемма

Если есть изоморфизм $\varphi : X \to X'$ между конечными подграфами $X \subset G$, $X' \subset G'$ универсальных графов, и $v \in G$, то есть продолжающий его изоморфизм

$$\varphi_1 : X \cup \{v\} \to X'_1, \quad \varphi_1|_X = \varphi.$$

- Применяем её попеременно к f_n (добавляя точки в прообразе) и к f_n^{-1} (добавляя точки в образе). И вот теперь всё работает!

Существование универсального графа

Как можно доказать существование универсального графа? Придумать правильное понимание термина «типичный» — чтобы типичный граф оказался универсальным!
Возьмём счётное число вершин $\{v_1, v_2, \dots\}$, и для каждой пары $i < j$ подкинем монетку, чтобы определить, соединены ли вершины v_i и v_j ребром.

Теорема (Эрдеш–Реньи)

С вероятностью 1 получающийся граф G — универсальный.

Универсальность: все подграфы

Пусть есть конечный граф Γ с вершинами $u_1, \ldots, u_k$.

Лемма

С вероятностью 1 граф Γ будет подграфом случайного графа G.

Доказательство.

- Попробуем отправить $u_1, \ldots, u_k$ в $v_1, \ldots, v_k$. С вероятностью $p_0 = \frac{1}{2^{k(k-1)/2}}$ мы выиграли. Если нет:
- Попробуем отправить $u_1, \ldots, u_k$ в $v_{k+1}, \ldots, v_{2k}$. С вероятностью $p_0 = \frac{1}{2^{k(k-1)/2}}$ мы выиграли. Если нет:
- Попробуем отправить $u_1, \ldots, u_k$ в $v_{2k+1}, \ldots, v_{3k}$. С вероятностью $p_0 = \frac{1}{2^{k(k-1)/2}}$ мы выиграли. Если нет:
- $\ldots$

$\square$

Универсальность: продолжение изоморфизма подграфов

Счётное число условий вида «если

$$f : \{v_{i_1}, \dots, v_{i_k}\} \to \{v_{j_1}, \dots, v_{j_k}\},$$

это изоморфизм подграфов, то он продолжается до автоморфизма G».

Нужно проверить, что каждое выполняется с вероятностью 1.

Лемма

Пусть заданы конечные подмножества $X \subset X', Y$ в множестве вершин V и биекция $f : X \to Y$. При условии, что f — изоморфизм подграфов G на вершинах из X и из Y, с вероятностью 1 существует продолжение f до изоморфизма подграфов $f' : X' \to Y'$, $f'|_X = f$.

Один шаг продолжения

Доказательство леммы.

- Попробуем отправить точки из $X' \setminus X$ в какие-нибудь точки Y_1 из $V \setminus (X' \cup Y)$. Шанс p_0, что получится, отделён от нуля. Если не получилось:
- Попробуем отправить точки из $X' \setminus X$ в какие-нибудь ещё точки Y_2 из $V \setminus (X' \cup Y \cup Y_1)$. Шанс p_0, что получится, отделён от нуля. Если не получилось:
- Попробуем отправить точки из $X' \setminus X$ в какие-нибудь ещё точки Y_3 из $V \setminus (X' \cup Y \cup Y_1 \cup Y_2)$. Шанс p_0, что получится, отделён от нуля. Если не получилось:
- ...

$\square$

Продолжимость

Будем применять лемму как шаг индукции, продолжая изоморфизм f на всё новые и новые точки. Если на n-м шаге мы гарантированно добавляем вершину v_n (если только она уже не закрыта) — то в итоге получится отображение f, определённое на всём множестве вершин V. Ура!

Ещё нет: нам опять нужно проверить, что образ f будет тоже всем V. Поэтому мы опять на нечётных шагах добавляем вершины в область определения, а на чётных — в образ (применяя лемму выше к f^{-1}).

А вот теперь — ура!

Упражнения

Задача

Связен ли универсальный граф?

Задача

Как в универсальном графе устроены расстояния? Есть ли в нём две вершины на расстоянии 3 друг от друга?

Метрические пространства

А куда можно вкладывать конечные метрические пространства?

Определение

Универсальное метрическое пространство Урысона — такое
- полное (любая фундаментальная последовательность сходится)
- сепарабельное (есть счётное всюду плотное множество точек)

метрическое пространство (X, d), что
1. Любое конечное метрическое пространство в него изометрично вкладывается
2. Любые два его изометричных конечных подмножества можно совместить: любая изометрия между конечными подмножествами X продолжается до глобального движения X.

Обычное $\mathbb{R}^n$

А чем плохо $\mathbb{R}^n$? Или (раз уж точек может быть много) $\mathbb{R}^\infty = \bigcup_n \mathbb{R}^n$? Или — раз уж мы просим о полноте — пространство ℓ_2?

Задача*

a) Два изометричных конечных подмножества $\mathbb{R}^n$ совмещаются движением
b) Как по конечному метрическому пространству определить, вкладывается ли оно в $\mathbb{R}^n$?

Существование и единственность

Теорема (Урысон)

Универсальное метрическое пространство существует и единственно с точностью до изометрии.

Доказательство единственности:

Лемма (Лемма о продолжении)

Пусть заданы изометрия $f : A \to B$ между конечными подмножествами A и B универсальных пространств X и Y, и конечное подмножество $A' \supset A$. Тогда существуют такое $B' \subset Y$ и такая изометрия $f' : A' \to B'$, что $f'|_A = f$.

Доказательство леммы

Доказательство.

- Вложим A' в Y по первому свойству универсальности: существует изометрия $g : A' \to Y$
- Совместим два вложения A — отображения f и $g|_A$ — по второму свойству: существует h, такое, что $h \circ g|_A = f$.
- Тогда $f' := h \circ g$ — искомое вложение. Действительно, по построению
$$f'|A = (h \circ g)|_A = h \circ (g|_A) = f.$$

□

Доказательство единственности

- Индукция при помощи лемма о продолжении.
- В X и Y есть счётные всюду плотные подмножества A и B.
- Применяя лемму, строим последовательность продолжающих друг друга отображений $f_n : A_n \to B_n$
- Добавляя по одной точке, обеспечиваем, чтобы область определения $f = \bigcup_n f_n$ включала в себя всё A...
- ...а область значений — всё B (применяя лемму на чётных шагах к f^{-1}).
- Продолжим f по непрерывности — получим изометрию между X и Y.

Существование

Теорема (А. М. Вершик)

Универсальное метрическое пространство — типично!

- Достаточно задавать метрику на счётном всюду плотном подмножестве: потом пополним.
- Раз оно всё равно счётное, это всё равно, что задавать метрику на $\mathbb{N}$. То есть функцию

$$\rho : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+.$$

- Два подхода:
  - вероятностный («с вероятностью 1 случайная метрика задаёт универсальное пространство»).Проблема: нельзя подкидывать «монетку» независимо.
  - топологический («множество хороших метрик — остаточное: пересечение счётного числа открытых всюду плотных»).

Ссылки

- А. М. Вершик, Случайные метрические пространства и универсальность, *УМН*, **59**:2(356) (2004), с. 65–104.
- P. J. Cameron, The Random Graph, In: R. L. Graham, J. Nešetřil (eds), The Mathematics of Paul Erdös II, Algorithms and Combinatorics, vol. 14., Springer, Berlin, Heidelberg.
- P. Erdös, A. Rényi, Asymmetric graphs. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **14** (1963), pp. 295–315.
- R. Rado, Universal graphs and universal functions, Acta Arith., **9** (1964), pp. 331–340.
- W. Ackermann, Die Widerspruchsfreiheit der allgemeinen Mengenlehre, *Mathematische Annalen* **114** (1937), pp. 305–315.
- P. Urysohn, Sur un espace métrique universel, *Bull. Sci. Math.* **51** (1927), pp. 1–38.
  Перевод: П. С. Урысон, Об универсальном метрическом пространстве // П. С. Урысон, Труды по топологии и другим областям математики, т. 2 / Под ред. П. С. Александрова. М.-Л.: ГИТТЛ, 1951, с. 747-776.